

ВОЗБУЖДЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕЗОНАТОРОВ W-ДИАПАЗОНА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ СГУСТКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

М. В. Арсентьева^{а, б, 1}, А. Е. Левичев^а

^а Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия

^б Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

В Институте ядерной физики им. Г. И. Будкера продолжается разработка ускоряющих структур миллиметрового диапазона длин волн. Первоначальный интерес к таким структурам был проявлен ввиду возможности получения высоких ускоряющих градиентов, так как с повышением рабочей частоты увеличивается напряженность электрического поля пробоя. Также структуры W-диапазона могут быть использованы для формирования сгустков заряженных частиц с целью возбуждения высоких амплитуд электрического поля в экспериментах по плазменному кильватерному ускорению. В предыдущих работах были получены теоретические оценки возбуждения структуры резонаторов одиночным сгустком заряженных частиц, проведено сравнение с моделированием возбуждения. В данной работе приводятся оценки возбуждения структуры последовательностью сгустков заряженных частиц с учетом параметров последовательности, а также расстройки частоты отдельных резонаторов относительно частоты следования сгустков.

Development of the millimeter wavelength structure of cavities is under progress at the Budker Institute of Nuclear Physics. The initial interest in such structures was caused by the possibility of obtaining higher accelerating gradient due to the breakdown limit increase at higher operating frequency domain. The W-band structures can also be used for the charged particle bunch production for the experiments with the plasma wakefield acceleration. Analysis of the cavity structure excitation by the single bunch, as well as its comparison with the excitation simulations, was given in the previous studies. This paper presents analysis of the structure excitation by the train of charged particle bunches taking into account the train parameters and individual detuning of cavity frequency relative to the bunch repetition rate.

PACS: 29.20.–с

ВВЕДЕНИЕ

Разработка и исследования структур W-диапазона осуществляются в ведущих ускорительных лабораториях [1, 2], где экспериментально уже показана возможность достижения ускоряющего градиента величиной 230 МВ/м при рабочей частоте структуры 110 ГГц [3].

Источниками мощности для структур W-диапазона могут быть как вакуумные СВЧ-приборы (например, гиротрон), так и интенсивный пучок заряженных частиц,

¹E-mail: M.V.Arsentyeva@inp.nsk.su

причем пучок может быть представлен как одиночным сгустком, так и последовательностью сгустков заряженных частиц. В рамках работы по разработке структуры W-диапазона предполагается использовать пучок, параметры которого приведены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры пучка для возбуждения структуры

Параметр	Значение
Заряд одиночного сгустка q , нК	0,3
Число сгустков N_b	55
Частота следования f_b , МГц	178,5
Период следования ΔT , нс	5,6
Энергия W , МэВ	50

В предыдущих работах [4, 5] подробно описано возбуждение структуры резонаторов одиночным электронным сгустком, показана зависимость наведенного электрического поля от длительности возбуждающего пучка, помимо этого дается оценка возбуждению высших мод. В данной работе предполагается, что параметры возбуждения резонаторов структуры одиночным сгустком известны, и проводится оценка параметров возбуждения структуры последовательностью одинаковых сгустков заряженных частиц по сравнению с возбуждением одиночным сгустком.

ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ W-ДИАПАЗОНА

Структура W-диапазона представляет собой последовательность резонаторных цилиндрических ячеек, для которых фундаментальная частота находится в диапазоне 75–110 ГГц. Первый прототип такой структуры, разработанный в ИЯФ СО РАН [4], имел рабочую частоту около 96 ГГц. В данном случае в качестве рабочей частоты выбрано значение 85 ГГц для возможности повышения относительной точности производства и увеличения центральной апертуры в резонаторах для пролета пучка. Частоте 85 ГГц соответствует мода электромагнитных колебаний E_{010} , причем

Таблица 2. Параметры структуры W-диапазона

Параметр	Значение
Рабочая частота (мода E_{010}) f_c , ГГц	85
Число резонаторов N_c	100
Диаметр резонаторов $2r$, мм	2,7
Длина резонаторов l , мм	1,75
Длина межрезонаторного промежутка g , мм	1,75
Добротность (мода E_{010})	12000
Постоянная затухания на моде E_{010} T_c , нс	12,7
Центральная апертура резонаторов a , мм	0,8
Точность изготовления b , мм	$\pm 0,01$

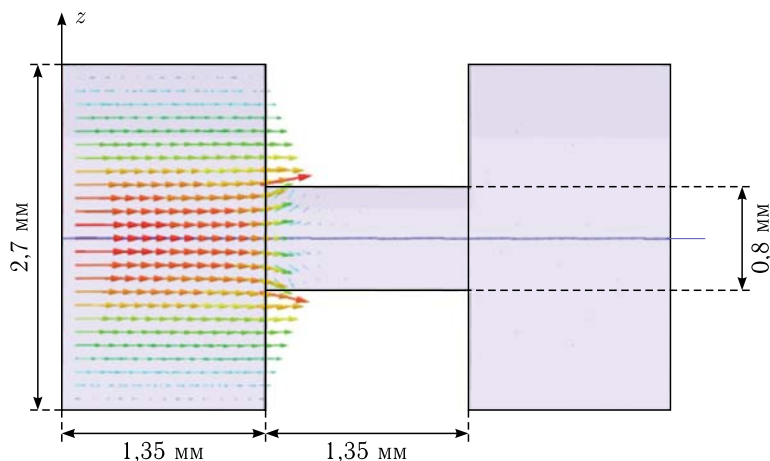


Рис. 1. Схематичный вид двух резонаторов структуры в сечении (в левом резонаторе стрелками показано медимальное распределение возбужденного электрического поля)

другие моды значительно отстоят от нее: так, следующей по значению частоты является мода M_{111} , для которой собственная частота составляет около 108 ГГц. Подробные параметры структуры представлены в табл. 2, схематичный вид двух резонаторов структуры показан на рис. 1.

ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕЗОНАТОРОВ СТРУКТУРЫ W-ДИАПАЗОНА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ СГУСТКАМИ

Рассмотрим возбуждение отдельного резонатора структуры последовательностью сгустков заряженных частиц. Предположим, первый сгусток из последовательности индуцирует в одном из резонаторов структуры напряжение $\tilde{V}_b(t) = V_b \cos \omega_c t$, которое меняется во времени t с собственной частотой резонатора $\omega_c = 2\pi f_c$; величина V_b является амплитудой наведенного напряжения. Введем величину V_i для обозначения амплитуды напряжения, видимой i -м сгустком в последовательности. Амплитуда напряжения, «видимая» первым сгустком, составляет половину от наведенного им напряжения, т. е. $V_1 = V_b/2$, согласно фундаментальной теореме о нагрузке током пучка [6].

Рассмотрим прохождение второго сгустка, который следует за первым сгустком с временной задержкой ΔT . В силу суперпозиции электромагнитных полей второй сгусток «видит» половину индуцированного им самим напряжения в совокупности с индуцированным первым сгустком напряжением с учетом временного затухания и набега фазы $\omega_c \Delta T$, т. е.

$$V_2 = \frac{V_b}{2} + V_b \exp\left(-\frac{\Delta T}{T_c}\right) \cos(\omega_c \Delta T), \quad (1)$$

где $T_c = (2Q)/\omega_c$ — постоянная затухания в резонаторе структуры; Q — собственная добротность резонатора на моде E_{010} .

На основе (1) для сгустка под номером n может быть получено выражение для напряжения, «видимого» сгустком под номером n :

$$V_n = \frac{V_b}{2} + V_b \exp\left(-\frac{\Delta T}{T_c}\right) \cos(\omega_c \Delta T) + V_b \exp\left(-\frac{2\Delta T}{T_c}\right) \cos(2\omega_c \Delta T) + \dots + V_b \exp\left(-\frac{(n-1)\Delta T}{T_c}\right) \cos((n-1)\omega_c \Delta T), \quad (2)$$

где первое слагаемое представляет собой напряжение, наведенное самим n -м сгустком, второе — напряжение, наведенное предыдущим сгустком под номером $(n-1)$, последнее — напряжение, наведенное первым сгустком последовательности. Выражение (2) может быть переписано как

$$V_n = V_b \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} \exp\left(-\frac{m\Delta T}{T_c}\right) \cos(m\omega_c \Delta T) \right) \quad (3)$$

или представлено как вещественная часть от комплексной величины:

$$V_n = \operatorname{Re} \left[V_b \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} \exp\left(-\frac{m\Delta T}{T_c} + im\omega_c \Delta T\right) \right) \right]. \quad (4)$$

В таком случае сумма в (4) может быть вычислена как сумма геометрической прогрессии:

$$V_n = \operatorname{Re} \times \left[V_b \left(\frac{1}{2} + \frac{\exp\left(-\frac{\Delta T}{T_c} + i\omega_c \Delta T\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{(n-1)\Delta T}{T_c} + i(n-1)\omega_c \Delta T\right)\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\Delta T}{T_c} + i\omega_c \Delta T\right)} \right) \right]. \quad (5)$$

С учетом того, что $V_1 = V_b/2$, величину $A = V_n/V_1$ будем называть коэффициентом возбуждения, так как она показывает, во сколько раз увеличивается напряжение, «видимое» в резонаторе n -м сгустком, по сравнению с напряжением, «видимым» первым сгустком:

$$A = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{2 \exp\left(-\frac{\Delta T}{T_c} + i\omega_c \Delta T\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{(n-1)\Delta T}{T_c} + i(n-1)\omega_c \Delta T\right)\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\Delta T}{T_c} + i\omega_c \Delta T\right)} \right]. \quad (6)$$

В соответствии с фундаментальной теоремой о нагрузке током пучка коэффициент возбуждения также равен по величине отношению энергии, оставляемой в резонаторе n -м сгустком, по сравнению с энергией, оставляемой первым сгустком.

Заметим, что при

$$\omega_c \Delta T = 2\pi N, \quad (7)$$

где N — любое натуральное число, комплексная величина в (6) становится чисто вещественной. Проведя преобразование $\omega_c \Delta T = \omega_c/f_b$, можно увидеть, что (7) соответствует случаю, когда собственная частота возбуждаемого резонатора точно равна

кратной частоте следования сгустков. В противном случае имеет место равенство

$$\omega_c \Delta T = \frac{\omega_c}{f_b} = \frac{2\pi f_c}{f_b} = 2\pi (N + \delta f), \quad (8)$$

где $\delta f \neq 0$ — расстройка частоты следования сгустков относительно частоты резонатора.

Сначала рассмотрим случай, когда имеет место условие (7), т. е. $\delta f = 0$. В таком случае коэффициент возбуждения (6) принимает значение

$$A = 1 + \frac{2 \exp\left(-\frac{\Delta T}{T_c}\right) \left(1 - \exp\left(-\left(n-1\right)\frac{\Delta T}{T_c}\right)\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\Delta T}{T_c}\right)}. \quad (9)$$

Соответствующая (9) зависимость коэффициента возбуждения от номера сгустка в последовательности представлена на рис. 2.

Согласно рис. 2, все сгустки, начиная со второго, «видят» в резонаторе напряжение выше, чем первый сгусток, а значит, каждый сгусток оставляет в резонаторе большую

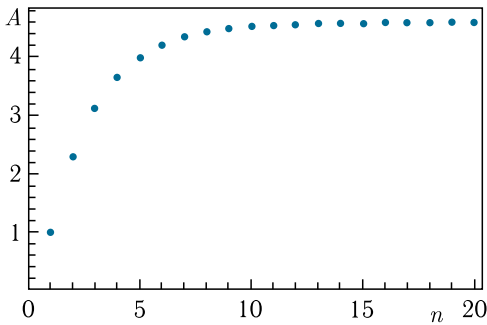


Рис. 2. Зависимость коэффициента возбуждения от номера сгустка в последовательности

энергию по сравнению с предыдущим. Помимо этого наблюдается стабилизация процесса начиная примерно с десятого сгустка, который пролетает резонатор через 50 нс. Все последующие сгустки в равной мере взаимодействуют с резонатором.

Рассмотрим далее случай ненулевой расстройки частоты, т. е. $\delta f \neq 0$. Для проведения дальнейшего анализа возбуждения определимся, в каком диапазоне значений может находиться расстройка частоты резонаторов структуры относительно частоты следования сгустков.

Для оценки воспользуемся моделью идеального цилиндрического резонатора без учета пролетных отверстий. В этом случае зависимость частоты моды электромагнитных колебаний в цилиндрическом резонаторе определяется выражением [7]

$$f_c = \frac{c\nu_{01}}{2\pi r}, \quad (10)$$

где c — скорость света в вакууме; ν_{01} — первый корень функции Бесселя нулевого порядка; r — радиус резонатора. В случае изменения радиуса на величину Δr изменение частоты составит

$$\Delta f = -\frac{c\nu_{01}\Delta r}{2\pi r^2}. \quad (11)$$

С использованием параметров структуры из табл. 2, из (11) можно получить, что отклонение радиуса резонатора от проектного значения 1,35 мм на величину точности изготовления 0,01 мм влечет изменение собственной частоты резонатора на величину

около 0,63 ГГц. Заметим, что это в несколько раз превосходит частоту следования сгустков f_b , поэтому из определения расстройки частоты (8) следует, что при данной точности изготовления величина расстройки частоты является случайной величиной, равномерно распределенной на промежутке единичной длины [8]. В целях удобства за такой промежуток единичной длины для изменения величины расстройки выберем промежуток $\delta f \in (-0,5, 0,5)$.

Перепишем выражение для коэффициента возбуждения (6) в терминах расстройки частоты:

$$A = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{2 \exp \left(-\frac{\Delta T}{T_c} + 2\pi i \delta f \right) \left(1 - \exp \left(-(n-1) \frac{\Delta T}{T_c} + 2\pi i \delta f (n-1) \right) \right)}{1 - \exp \left(-\frac{\Delta T}{T_c} + 2\pi i \delta f \right)} \right]. \quad (12)$$

Коэффициент возбуждения в (12) представляет собой преобразование случайной величины δf с равномерным распределением. Дальнейшие выкладки сделаны с использованием элементов теории вероятностей, информация о которых может быть найдена, например, в [8]. Однако такое преобразование, как в (12), не имеет аналитической формы записи функции распределения или плотности вероятности, поэтому для определения его характеристик были использованы численные методы. Также, как видно из табл. 1, структуру планируется возбуждать последовательно из 55 сгустков, в то время как приблизительно с десятого сгустка наступает установившийся режим. Для упрощения дальнейший анализ будет проводиться на примере установившегося режима.

С помощью численного интерполирования из выражения (12) может быть получена функция распределения величины коэффициента возбуждения, что по определению является вероятностью того, что коэффициент возбуждения A примет значение меньше некоторой фиксированной величины x , где x — произвольное действительное число. Иначе говоря,

$$F_A(x) = P(A < x). \quad (13)$$

Функция распределения коэффициента возбуждения изображена на рис. 3, откуда видно, что величина коэффициента возбуждения не принимает значение меньше 0,2 и не превосходит значения 4,6.

Плотность вероятности коэффициента возбуждения $f_A(x)$ является производной функции распределения, т. е. $f_A(x) = dF_A(x)/dx$. Ее график представлен на рис. 4.

Из рис. 4 видно, что наиболее вероятна величина коэффициента возбуждения в одиночном резонаторе около 0,25, где наблюдается значительный локальный максимум, т. е. большая часть сгустков слабее взаимодействует с резонатором, чем первые сгустки в пучке. Также имеется небольшой локальный максимум в области коэффициента возбуждения около величины 4,5, что соответствует более сильному взаимодействию большей части сгустков по сравнению с первыми сгустками последовательности.

Рассмотрим теперь взаимодействие сгустков со всеми резонаторами структуры, общее число которых в структуре равно 100. Заметим, что взаимодействие сгустков с отдельными резонаторами структуры является независимым, так как они не связаны

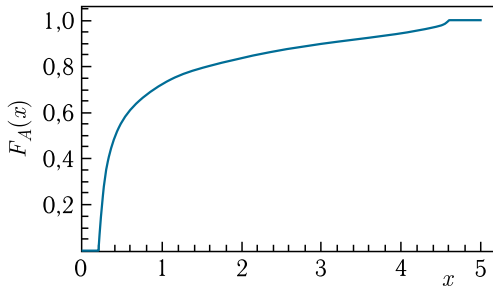


Рис. 3. Функция распределения коэффициента возбуждения

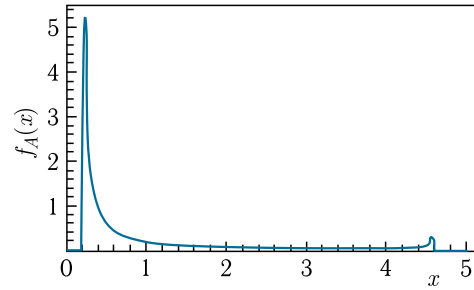


Рис. 4. Плотность вероятности величины коэффициента возбуждения

по электромагнитному полю [4], а величина расстройки частоты имеет одинаковое равномерное распределение $\delta f \in (-0,5, 0,5)$ при изготовлении всех ячеек.

В данном случае уместна центральная предельная теорема [9], согласно которой среднее значение величины коэффициента возбуждения A стремится к центрированному и нормированному нормальному распределению

$$f_{\bar{A}}(x) \rightarrow \frac{\sqrt{Nc}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2 Nc}{2\sigma^2}\right), \quad (14)$$

где Nc — общее число резонаторов в структуре W-диапазона; σ^2 и μ — дисперсия и математическое ожидание для величины с функцией распределения (13) соответственно. График плотности вероятности усредненного по всем резонаторам структуры коэффициента возбуждения приведен на рис. 5.

Как следует из рис. 5, максимум плотности вероятности усредненного коэффициента распределения находится около 1. Это равносильно тому, что при взаимодействии последовательности сгустков со структурой наиболее вероятна ситуация, когда большая часть сгустков взаимодействует со структурой на уровне первого сгустка. Иначе говоря, используемые параметры структуры W-диапазона и возбуждающего пучка (см. табл. 1 и 2) не обеспечивают большего взаимодействия последних, чем при взаимодействии структуры и одиночного сгустка.

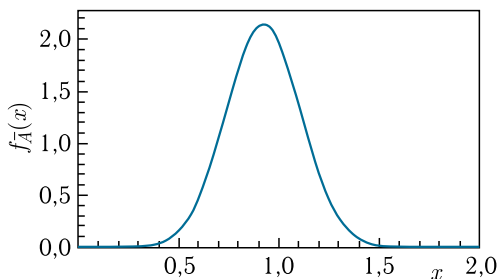


Рис. 5. Распределение плотности вероятности усредненного по резонаторам структуры коэффициента возбуждения

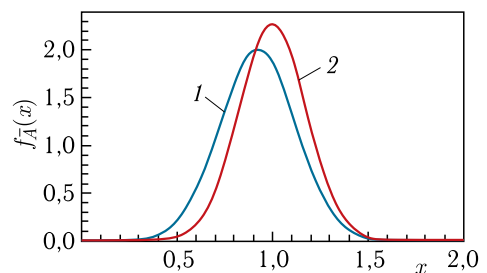


Рис. 6. Распределение плотности вероятности усредненного по резонаторам структуры коэффициента возбуждения: 1 — точность изготовления 0,01 мм, 2 — точность изготовления 0,001 мм

В том случае, если точность изготовления составит 0,001 мм, соответствующий диапазон расстройки частоты обеспечит незначительно больший коэффициент возбуждения (рис. 6). Иначе говоря, при технологически возможных точностях изготовления резонаторов последовательность сгустков не сможет обеспечить увеличения запасенной энергии в структуре по сравнению с одиночным сгустком.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено взаимодействие последовательности сгустков заряженных частиц с резонаторами структуры W-диапазона. Получены аналитические выражения для коэффициента возбуждения резонаторов структуры последовательностью сгустков заряженных частиц. Рассмотрены два случая: отсутствие расстройки частоты отдельных резонаторов от частоты следования сгустков и наличие расстройки. Показано, что в случае отсутствия расстройки величина коэффициента возбуждения в установленном режиме достигает значения около 4,5 по отношению к возбуждению одиночным сгустком. В случае ненулевой расстройки частоты для получения усредненного коэффициента возбуждения по всем резонаторам структуры использованы элементы теории вероятностей и численные методы. Показано, что при имеющихся точностях изготовления большая часть сгустков пучка взаимодействует со структурой резонаторов на уровне первого сгустка. Несмотря на это, полученные аналитические выкладки приведены в общем виде, а значит, могут быть использованы и для оценки взаимодействия структур резонаторов с другими рабочими частотами с последовательностью сгустков заряженных частиц.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-32-90146.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dal Forno M., Dolgashev V., Bowden G., Clarke C., Hogan M., McCormick D., Novokhatski A., Spataro B., Weathersby S. et al. RF Breakdown Tests of Millimeter-Wave Metallic Accelerating Structures // Phys. Rev. Accel. Beams. 2016. V. 19. P. 011301.
2. Dal Forno M., Dolgashev V., Bowden G., Clarke C., Hogan M., McCormick D., Novokhatski A., O'Shea B., Spataro B. et al. High Gradient Tests of Metallic Millimeter-Wave Accelerating Structures // Nucl. Instr. Meth. A. 2017. V. 864. P. 12.
3. Othman M.A.K., Picard J., Schaub S., Dolgashev V.A., Lewis S.M., Neilson J., Haase A., Jawla S., Spataro B. et al. Experimental Demonstration of Externally Driven Millimeter-Wave Particle Accelerator Structure // Appl. Phys. Lett. 2020. V. 117. P. 073502.
4. Arsentjeva M.V., Barnyakov A.M., Levichev A.E., Nikiforov D.A. Development of the Millimeter-Wave Accelerating Structure // Phys. Part. Nucl. Lett. 2019. V. 16. P. 885.
5. Arsentjeva M.V., Levichev A.E. Simulations of the Millimeter Wavelength Accelerating Structure Excitation // J. Phys. Conf. Ser. 2020. V. 1596. P. 012024.
6. Wangler T.P. Principles of RF Linear Accelerators. New York: John Wiley & Sons, 1998.
7. Карлинер М. М. Электродинамика СВЧ: Курс лекций. Изд. 2-е, исправ. Новосибирск, 2006.
8. Боровков А. А. Теория вероятностей: Учеб. пособие для вузов по направлению подгот. 010100 «Математика». М.: URSS, 2009.
9. Симушкин С. В. Методы теории вероятностей: Учеб. пособие СПб.: Лань, 2020. С. 274.