Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 3(248). С. 451–457

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

О ПОИСКЕ ГРАВИТАЦИОННОЙ КИРАЛЬНОЙ АНОМАЛИИ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Г. Ю. Прохоров[а, б, 1], *О. В. Теряев*[а, б, 2], *В. И. Захаров*[а, б, 3]

[а] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[б] Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», Москва

В последние два десятилетия было показано, что квантовые аномалии не только играют важную роль в физике частиц, но и находят неожиданные приложения в физике квантовых жидкостей, приводя к ранее неизвестным недиссипативным транспортным явлениям. В данной работе обсуждаются некоторые аспекты, связанные с поиском проявлений гравитационной киральной аномалии в завихренных и ускоренных средах.

In the last two decades it has been shown that quantum anomalies not only play an important role in particle physics, but also find novel applications in the physics of quantum fluids, leading to previously unknown non-dissipative transport phenomena. In this paper, we will discuss some aspects related to the search for manifestations of the gravitational chiral anomaly in a vortical and accelerated media.

PACS: 04.62.+v; 47.65.–d; 67.40.Vs; 03.70.+k; 11.10.–z; 12.38.Mh

ВВЕДЕНИЕ

Квантовый мир существенно не похож на мир классический. Например, некоторые законы сохранения, справедливые в классической физике, нарушаются на квантовом уровне из-за рождения и уничтожения пар частиц и античастиц в вакууме. Данный эффект хорошо известен в современной квантовой теории поля и называется квантовыми аномалиями. В частности, существует киральная квантовая аномалия, за счет которой нарушается закон сохранения аксиального тока:

$$\nabla_\mu j_A^\mu = \frac{C}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{N}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\kappa\lambda} R_{\rho\sigma}{}^{\kappa\lambda}, \tag{1}$$

[1] E-mail: prokhorov@theor.jinr.ru

[2] E-mail: teryaev@theor.jinr.ru

[3] E-mail: vzakharov@itep.ru

где $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженностей электромагнитного поля; $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$ — тензор Римана; C и N — численные факторы, которые зависят от рассматриваемого типа полей, например, для полей Дирака $C = -1/(16\pi^2)$ и $N = 1/(384\pi^2)$. Таким образом, есть две части этой аномалии — калибровочная и гравитационная.

Квантовая аномалия (1) играет огромную роль в фундаментальной физике, и ее приложения вошли в современные учебники. Например, распад $\pi^0 \to 2\gamma$ происходит именно за счет данной аномалии (калибровочной части), также перенормируемость теории требует компенсации аномалий.

К настоящему времени найдены проявления (1) в совершенно новой области — релятивистской гидродинамике квантовых жидкостей [1]. Оказывается, что существует целый ряд новых эффектов в жидкости, помещенной во внешние поля, связанные с квантовыми аномалиями. Замечательно, что в роли такого поля может выступать не только реальное поле, как, например, магнитное поле $\mathbf{B}$, но и, например, вращение. Вращение характеризуется либо угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, либо *локальной* угловой скоростью, завихренностью $\omega^\mu = (1/2)\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}u_\nu\partial_\alpha u_\beta$, где u_μ — четырехскорость. Также роль внешнего поля может играть ускорение среды $a_\mu = u^\nu\partial_\nu u_\mu$. В данной работе мы рассмотрим эффекты, в которых ускорение и завихренность — классические внешние поля, хотя существуют современные подходы, где они становятся динамическими квантовыми величинами [2].

В качестве иллюстрации рассмотрим наиболее известное из новых явлений, называющееся киральным магнитным эффектом (CME). Рассмотрим среду в магнитном поле, состоящую из частиц с определенным спином. Гидродинамика строится как разложение по градиентам. Оказывается, что в линейном порядке по градиентам возникает электрический ток вида

$$\mathbf{j} = \sigma_B\mu_A\mathbf{B}, \tag{2}$$

где μ_A — аксиальный химический потенциал, характеризующий дисбаланс между лево- и правокиральными частицами, а σ_B — магнитная проводимость, причем данный ток связан с калибровочной частью аномалии

$$\sigma_B = -8C. \tag{3}$$

Вывод (3) весьма нетривиален, но был получен различными методами [1, 3–5].

Результат (2) выглядит парадоксальным сразу по нескольким причинам. Во-первых, из классической электродинамики известно, что ток (если не брать сложные эффекты в плазме) течет вдоль электрического, а не магнитного поля. Также удивительно, что ток (2) связан с аномалией $F\tilde{F} \sim \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$, хотя он существует даже тогда, когда нет электрического поля $\mathbf{E} = 0$, и аномалия (1), соответственно, равна нулю. Наконец, ток (2) является недиссипативным, что делает его похожим на сверхпроводимость. К настоящему времени существуют указания на (2) в твердом теле, а также ведется поиск в соударениях тяжелых ионов и на решетке [6].

Намного более нетривиальным оказался вопрос о гравитационной части аномалии (1). Обсуждению этого вопроса посвящена данная работа.

1. КИРАЛЬНЫЙ ВИХРЕВОЙ ЭФФЕКТ

Первым кандидатом на роль аномального тока, связанного с гравитационной частью аномалии, стал киральный вихревой эффект. Согласно данному эффекту, в среде с вращением возникает аксиальный ток, аналогичный (2), но с заменой магнитного поля на завихренность (положим $\mu_A = 0$):

$$j_A^\nu = (\sigma_T T^2 + \sigma_\mu \mu^2)\omega^\nu, \tag{4}$$

где T — температура; μ — обычный химический потенциал, связанный с электрическим зарядом; σ_T, σ_μ и $\sigma_{\mu 5}$ — некоторые числа. Заметим, что (4) справедливо для случая безмассовых частиц (для массивного случая см. [7]). Как и в случае (3), можно показать, что [1, 4, 5]

$$\sigma_\mu = -8C. \tag{5}$$

Уравнение (5) было получено в общем случае и подтверждается большинством непосредственных расчетов. В то же время σ_T должен определяться гравитационной частью аномалии [8–10]

$$\sigma_T = 64\pi^2 N\,. \tag{6}$$

Однако в данном случае доказательство оказывается более нетривиальным, чем в случае калибровочной аномалии, где эффект следовал непосредственно из гидродинамических уравнений. Проанализируем, в частности, вывод [10]. Рассматривается пространство-время с горизонтом и вращением на горизонте, похожее на пространство вращающейся черной дыры. Ток $T^2\omega^\nu$ можно получить напрямую из аномалии $R\tilde{R}$ в (1), интегрируя ее от горизонта до бесконечности, с точностью до константы. Данная константа играет существенную роль и может быть определена из дополнительного граничного условия равенства тока нулю на горизонте. В результате на бесконечности, с учетом того, что излучение черной дыры обладает температурой Хокинга, остается ток $T^2\omega^\nu$.

Данный вывод сразу приводит к (6) и подтверждается для спина 1/2, где $\sigma_T = 64\pi^2 N = 1/6$.

Однако уже в [9] было замечено, что в случае высших спинов описанный механизм может столкнуться с трудностями. Это было явно показано на примере теории Рариты–Швингера–Адлера [11], включающей поля со спинами 3/2 и 1/2. Гравитационная киральная квантовая аномалия была найдена в [12]:

$$\nabla_\mu j_A^\mu = \frac{-19}{384\pi^2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\kappa\lambda} R_{\rho\sigma}{}^{\kappa\lambda}, \tag{7}$$

а вихревой ток вычислен в [13]:

$$j_A^\nu = \left(\frac{5}{6}T^2 + \frac{5}{2\pi^2}\mu^2\right)\omega^\nu. \tag{8}$$

Видно, что для (8) выполняется (5), а (6) — нет. Таким образом, остается задача поиска универсального аномального транспортного явления, отвечающего гравитационной аномалии.

2. ВИХРЕВОЙ ПОТОК ЭНЕРГИИ

Попробуем подойти к данной проблеме с другой стороны и проанализируем оба явления — гравитационную аномалию и транспортные явления — с точки зрения квантовых корреляторов.

Один из способов вычисления аномалии основан на рассмотрении коррелятора двух тензоров энергии-импульса и одного оператора аксиального тока. Как показано в [14], для широкого класса теорий такая трехточечная функция равна универсальной функции $f(x,y,z)$ с точностью до коэффициента N:

$$\langle T\,\hat{T}^{\mu\nu}(x)\hat{T}^{\sigma\rho}(y)\hat{j}^{\omega}_{A}(z)\rangle_c = N \times f(x,y,z), \tag{9}$$

который соответствует аномалии из (1). При этом (9) вычисляется в обычном плоском пространстве-времени.

Рассмотрим теперь транспортные коэффициенты. Они могут быть найдены из разложения оператора плотности [7, 15]

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z}\exp\left\{-\beta_\mu(x)\hat{P}^\mu + \frac{1}{2}\,\overline{\omega}_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}_x + \frac{\mu}{T}\hat{Q} + \frac{\mu_A}{T}\hat{Q}_A\right\}, \tag{10}$$

где $\beta_\mu = u_\mu/T$; $\hat{P}^\mu$ — оператор импульса; $\hat{J}^{\mu\nu}_x$ — смещенные на вектор x_μ генераторы преобразований Лоренца, а $\hat{Q}$ и $\hat{Q}_A$ — векторный и аксиальный заряды. Оператор (10) записан для случая глобального термодинамического равновесия

$$\nabla_\mu\beta_\nu + \nabla_\nu\beta_\mu = 0. \tag{11}$$

Нас будет интересовать вихревой поток энергии

$$T_{\mu\nu} = (A_1T^2\mu_A + A_2\mu^2\mu_A + A_3\mu_A^3)(u_\mu\omega_\nu + u_\nu\omega_\mu)\,. \tag{12}$$

Коэффициент A_1 можно определить, например, раскладывая (10) в ряд по Q_5 и $\hat{J}^{\mu\nu} \sim \int(y^\mu T^{0\nu} - y^\nu T^{0\mu})\,d^3y$. Тогда A_1 определяется коррелятором при конечной температуре (в мнимом времени) вида

$$\frac{1}{T^2}\int\limits_0^{1/T} d\tau_x\,d\tau_y \int d^3x\,d^3y\,y^i\langle T_\tau\hat{j}^0_A(-i\tau_x,\mathbf{x})\hat{T}^{0j}(-i\tau_y,\mathbf{y})\hat{T}^{03}(0)\rangle_{T,c}, \tag{13}$$

где усреднение производится при $\overline{\omega} = \mu = \mu_A = 0$. Сравним (13) и (9). Коррелятор в (9) имеет универсальный вид и, например, для теории Рариты–Швингера–Адлера в -19 раз отличается от случая полей Дирака [12]. Тогда, казалось, бы $A_1 \sim N$. Однако все не так просто. Для этого вспомним о законах сохранения во внешнем поле:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\nu\lambda}j_\lambda + F^{\nu\lambda}_A j^A_\lambda, \tag{14}$$

где мы к привычному члену дописали член с аксиальным полем. За счет слагаемых в правой части — силы Лоренца — оказывается, что на самом деле $A_1 = 2\sigma_T$ из (4) (см., например, [5, 9]). Если мы теперь рассмотрим, например, (8), то окажется, что $A_1^{\mathrm{RSA}} = 5A_1^{\mathrm{Dirac}}$ вместо $A_1^{\mathrm{RSA}} = -19A_1^{\mathrm{Dirac}}$.

Почему же коррелятор $\langle \hat{T}\hat{T}\hat{j}_A \rangle$ не привел к гравитационной аномалии? Ответ, по-видимому, связан с тем, что (13), в отличие от (9), необходимо вычислять при конечной температуре (и затем проинтегрировать). То есть, вообще говоря, вычисляются два различных коррелятора.

Однако существует еще одна возможность, где аномалия все же должна явно проявиться.

3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ ВИХРЕВОЙ ЭФФЕКТ

Вспомним, каким образом были получены формулы (3) и (5) в [4]. Исходными являются законы сохранения и второй закон термодинамики

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\nu\lambda} j_\lambda, \quad \partial_\mu j^\mu = 0, \quad \partial_\mu j_5^\mu = C\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \quad \partial_\mu s^\mu \geqslant 0. \tag{15}$$

Можно показать, что для одновременного выполнения всех соотношений (15) к стандартному выражению для токов и потока энтропии в идеальной жидкости необходимо добавить дополнительные члены, линейные по градиентам, в том числе члены вида (2) и (4) с неизвестными коэффициентами σ_B и σ_μ. После чего условие $\partial_\mu s^\mu \geqslant 0$ переходит в равенство и приводит к системе уравнений для неизвестных коэффициентов. Решение соответствующей системы уравнений приводит к (3) и (5).

Из данного анализа следует, что аномалия, имеющая n-й порядок по градиентам, должна давать вклад в ток в $n-1$ порядке. В частности, аномалия $F\tilde{F}$ имела 2-й порядок по градиентам и привела к CVE и CME, которые имеют 1-й порядок.

Тогда, казалось бы, гравитационная киральная аномалия $R\tilde{R}$, будучи четвертого порядка по градиентам метрики, должна приводить к членам третьего порядка. Подобные члены были получены из микроскопической теории в ряде работ. Так, для полей Дирака было доказано, что ток имеет вид

$$j_\mu^{A(3)} = \left(-\frac{\omega^2}{24\pi^2} - \frac{a^2}{8\pi^2} \right) \omega_\mu. \tag{16}$$

На первый взгляд, кажется, что обобщение [4] на случай гравитации и гравитационной аномалии не так просто в связи с относительной сложностью гравитации и более высоким порядком по градиентам. Обнадеживающими стали работы [15] и [5], где было показано (в плоском пространстве), что при условии глобального термодинамического равновесия (11) многие формулы заметно упрощаются. В частности, нет необходимости рассматривать поток энтропии и достаточно рассмотреть закон сохранения тока.

Соответствующее обобщение в результате было построено в [16]. Вначале необходимо построить разложение для тока в третьем порядке по градиентам. Получим

$$j_\mu^{A(3)} = \xi_1(T) w^2 w_\mu + \xi_2(T)\alpha^2 w_\mu + \xi_3(T)(\alpha w) w_\mu + \xi_4(T) A_{\mu\nu} w^\nu + \xi_5(T) B_{\mu\nu} a^\nu, \tag{17}$$

где $\xi_n(T)$ — неизвестные транспортные коэффициенты; $\alpha_\mu = u^\nu \nabla_\nu \beta_\mu$ и $w_\mu = -(1/2)\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u^\nu \nabla^\alpha \beta^\beta$ — «тепловые» ускорение и завихренность, которые сводятся к обычным кинематическим ускорению и завихренности $\alpha_\mu = a_\mu/T$, $a_\mu = u^\nu \nabla_\nu u_\mu$

и $w_\mu = \omega_\mu/T$ в состоянии глобального равновесия; $A_{\mu\nu} = u^\alpha u^\beta R_{\alpha\mu\beta\nu}$ и $B_{\mu\nu} = (1/2)\epsilon_{\alpha\mu\eta\rho}u^\alpha u^\beta R^{\eta\rho}_{\beta\nu}$, а $\epsilon_{\alpha\mu\eta\rho}$ — символ Леви-Чивиты в искривленном пространстве.

В (17) присутствуют как члены с ξ_1, ξ_2 и ξ_3, которые выживают в пределе плоского пространства-времени, так и члены с ξ_4 и ξ_5, явно зависящие от кривизны. Простота (17) следует из условия глобального равновесия, а также дополнительного условия $R_{\mu\nu} = 0$, наложенного на внешнее гравитационное поле.

Далее необходимо потребовать, чтобы дивергенция тока (17) была равна (1) (гравитационной части). Соответствующее уравнение распадается на сумму независимых слагаемых. Приравнивая нулю коэффициенты перед каждым из членов, получим систему уравнений на коэффициенты ξ_n. При этом сразу можно из размерных соображений получить, что $\xi_1 = T^3\lambda_1$, $\xi_2 = T^3\lambda_2$, $\xi_3 = T^3\lambda_3$, $\xi_4 = T\lambda_4$, $\xi_5 = T\lambda_5$. Решение системы уравнений имеет вид

$$(\lambda_1 - \lambda_2)/32 = \mathscr{N}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = -8\mathscr{N} - \lambda_1/2, \quad \lambda_5 = 24\mathscr{N} - \lambda_1/2. \tag{18}$$

Замечательным является то, что даже при переходе к пределу плоского пространства остается ток вида

$$j_\mu^{A(3)} = \lambda_1(\omega_\nu\omega^\nu)\omega_\mu + \lambda_2(a_\nu a^\nu)\omega_\mu, \tag{19}$$

который, тем не менее, связан с аномалией (1) первым из соотношений в (18). Соответствующий аномальный ток (19) в [16] был назван кинематическим вихревым эффектом (KVE), так как явно зависит только от кинематических величин — ускорения и завихренности. Заметим, однако, что для массивных частиц λ_1, λ_2 становятся явными функциями параметров среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы рассказали о поисках проявлений гравитационной киральной квантовой аномалии в гидродинамике. По сравнению со случаем калибровочной аномалии, вывод следствий гравитационной киральной аномалии более нетривиален и тесно связан с рассмотрением свойств пространства, обладающего горизонтом событий. Такая нетривиальность связана, в первую очередь, с нарушением непосредственного соответствия по порядку производной между током и аномалией в данном случае [9]. Однако в случае высших спинов ситуация еще более сложная. Это подтверждается прямым вычислением CVE в модели Рариты–Швингера–Адлера.

С другой стороны, с точки зрения исходных гидродинамических уравнений, гравитационной киральной аномалии должен отвечать эффект третьего порядка по градиентам. И действительно, ток в среде с завихренностью и с ускорением оказывается аномальным. Вывод данной связи является обобщением известного вычисления для калибровочной аномалии на случай искривленного пространства-времени и основан на рассмотрении только базовых гидродинамических уравнений.

Работа частично поддержана грантом № 22-22-00664 Российского научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zakharov V. I.* Chiral Magnetic Effect in Hydrodynamic Approximation // Lect. Notes Phys. 2013. V. 871. P. 295; arXiv:1210.2186 [hep-ph].
2. *Dubovsky S., Hui L., Nicolis A., Son D. T.* Effective Field Theory for Hydrodynamics: Thermodynamics, and the Derivative Expansion // Phys. Rev. D. 2012. V. 85. P. 085029; arXiv:1107.0731 [hep-ph].
3. *Fukushima K., Kharzeev D. E., Warringa H. J.* The Chiral Magnetic Effect // Phys. Rev. D. 2008. V. 78. P. 074033; arXiv:0808.3382 [hep-ph].
4. *Son D. T., Surowka P.* Hydrodynamics with Triangle Anomalies // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 191601; arXiv:0906.5044 [hep-ph].
5. *Yang S. Z., Gao J. H., Liang Z. T.* Constraining Non-Dissipative Transport Coefficients in Global Equilibrium // Symmetry. 2022. V. 14, No. 5. P. 948; arXiv:2203.14023.
6. *Kharzeev D. E.* The Chiral Magnetic Effect and Anomaly-Induced Transport // Prog. Part. Nucl. Phys. 2014. V. 75. P. 133–151; arXiv:1312.3348 [hep-ph].
7. *Prokhorov G. Y., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Effects of Rotation and Acceleration in the Axial Current: Density Operator vs Wigner Function // JHEP. 2019. V. 02. P. 146; arXiv:1807.03584.
8. *Landsteiner K., Megias E., Pena-Benitez F.* Gravitational Anomaly and Transport // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. P. 021604; arXiv:1103.5006 [hep-ph].
9. *Jensen K., Loganayagam R., Yarom A.* Thermodynamics, Gravitational Anomalies and Cones // JHEP. 2013. V. 02. P. 088; arXiv:1207.5824 [hep-ph].
10. *Stone M., Kim J.* Mixed Anomalies: Chiral Vortical Effect and the Sommerfeld Expansion // Phys. Rev. D. 2018. V. 98, No. 2. P. 025012; arXiv:1804.08668.
11. *Adler S. L.* Analysis of a Gauged Model with a Spin-1/2 Field Directly Coupled to a Rarita–Schwinger Spin-3/2 Field // Phys. Rev. D. 2018. V. 97, No. 4. P. 045014; arXiv:1711.00907.
12. *Prokhorov G. Yu., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Gravitational Chiral Anomaly for Spin 3/2 Field Interacting with Spin 1/2 Field // Phys. Rev. D. 2022. V. 106, No. 2. P. 025022; arXiv:2202.02168.
13. *Prokhorov G. Yu., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Chiral Vortical Effect in Extended Rarita–Schwinger Field Theory and Chiral Anomaly // Phys. Rev. D. 2022. V. 105, No. 4. P. L041701; arXiv:2109.06048.
14. *Erdmenger J.* Gravitational Axial Anomaly for Four-Dimensional Conformal Field Theories // Nucl. Phys. B. 1999. V. 562. P. 315–329; arXiv:hep-th/9905176.
15. *Buzzegoli M.* Thermodynamic Equilibrium of Massless Fermions with Vorticity, Chirality and Magnetic Field // Lect. Notes Phys. 2021. V. 987. P. 53–93; arXiv:2011.09974.
16. *Prokhorov G. Yu., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Hydrodynamic Manifestations of Gravitational Chiral Anomaly // Phys. Rev. D. 2022. V. 129, No. 15. P. 151601; arXiv:2207.04449.

Получено 27 октября 2022 г.