

## ПИОН В ФОРМАЛИЗМЕ БЕТЕ–СОЛПИТЕРА С СЕПАРАБЕЛЬНЫМ ЯДРОМ

*С. Г. Бондаренко<sup>а,б</sup>, М. К. Слаутин<sup>а,б,1</sup>*

<sup>а</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия

<sup>б</sup> Государственный университет «Дубна», Дубна, 141980, Россия

Рассматриваются статические и динамические свойства пиона в формализме Бете–Солпитера. Для аналитического решения уравнения используется сепарабельное ядро кварк-антикваркового взаимодействия первого ранга. Многомерные интегралы, описывающие свойства пионов, рассчитываются несколькими численными методами и сравниваются с предыдущими работами. Обнаружена ошибка в расчете вклада тока взаимодействия в упругий формфактор пиона. На основании исправленных результатов параметры ядра были изменены. Представлены рассчитанные статические свойства, а также переходный и упругий формфакторы в сравнении с последними экспериментальными данными.

The static and dynamic properties of the pion in the Bethe–Salpeter approach are considered. The rank-one separable kernel of the quark–antiquark interaction is used to solve the equation analytically. Multidimensional integrals describing pion properties are calculated by several numerical methods and compared with previous papers. An error in the calculation of the interaction part of the elastic pion form factor is found. By using the corrected results, the kernel parameters are refitted. The calculated static properties as well as transition and elastic form factors are presented in comparison with the recent experimental data.

PACS: 13.20.Cz; 13.25.Cq; 14.40.Aq

### ВВЕДЕНИЕ

Пион — это простейшая кварк-антикварковая система. Небольшая масса пиона по сравнению с массами других мезонов позволяет ему играть важную роль в описании ядерной динамики. Существует множество моделей для описания пиона: правила сумм КХД [1]; модель с нерелятивистским потенциалом [2]; релятивистская модель, использующая формализм светового фронта [3]; модель Намбу–Йона-Лазинио [4–8]; модель, основанная на киральной симметрии [9]; инстантонная модель пиона [10]; модели, основанные на вычислениях на решетках [11, 12]; модели, основанные на уравнении Бете–Солпитера (БС) с одетыми кварковыми и глюонными пропагаторами [13–15]; модель Намбу–Йона-Лазинио с петлей Полякова [16].

---

<sup>1</sup>E-mail: slautin@jinr.ru

Изучение свойств пиона в последнее время стало актуальным из-за переходного формфактора пиона, который вносит вклад в аномальный магнитный момент мюона ( $g-2$ ) [15]. Кроме того, запланирован ряд экспериментов по измерению зарядового и переходного формфактора пиона [17–20].

В данной работе рассматривается модель, основанная на релятивистском ковариантном уравнении Бете–Солпитера с сепарабельным ядром. Выбор этой модели обусловлен простотой аналитического решения вершинной функции пиона. Параметр  $\Lambda$ , характеризующий область кварк-антикваркового взаимодействия, проявляется в формфакторе сепарабельного взаимодействия и обеспечивает тесную связь между композитной структурой пиона и массой кварка.

Статья организована следующим образом: в разд. 1 приведены основные формулы формализма, в разд. 2 описаны пионные константы и формфакторы, в разд. 3 обсуждаются параметры модели и полученные результаты, а в заключении обобщаются основные результаты.

## 1. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПИОНА

Уравнение Бете–Солпитера для вершинной функции пиона записывается следующим образом:

$$\Gamma_{\alpha\beta}(k; p) = i \int \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} V_{\alpha\beta;\epsilon\lambda}(k, k''; p) S_{\lambda\eta}(k'' + p/2) \Gamma_{\eta\zeta}(k''; p) S_{\zeta\epsilon}(k'' - p/2), \quad (1)$$

где  $p, k; p = k_1 + k_2$  и  $k = (k_1 - k_2)/2$  являются общим и относительным 4-импульсами соответственно и  $V(k', k; p)$  — ядро взаимодействия. Масса пиона  $m_\pi$  фиксирована и может рассматриваться как неявный параметр модели  $p^2 = m_\pi^2$  с  $m_\pi = 140$  МэВ. Фермионный пропагатор с массой  $m$  определяется как  $S(k) = (\not{k} - m + i\epsilon)^{-1}$ , дираковские индексы обозначаются греческими символами.

Сепарабельное ядро взаимодействия первого ранга может быть записано в следующем виде:

$$V_{\alpha\beta;\delta\gamma}(k', k; p) = \sum_{i=1,4} \Delta_{\alpha\beta}^i(k'; p) \overline{\Delta}_{\delta\gamma}^i(k; p) \quad (2)$$

с

$$\Delta_{\alpha\beta}^i(k'; p) = f_i(k'^2, k' \cdot p) \Omega_{\alpha\beta}^i, \quad \overline{\Delta}_{\alpha\beta}^i(k; p) = f_i(k^2, k \cdot p) \overline{\Omega}_{\alpha\beta}^i.$$

Матрицы  $\Omega^i$  и  $\overline{\Omega}^i$  представляют собой спиновую структуру, а  $f_i(k'^2, k' \cdot p)$  и  $f_i(k^2, k \cdot p)$  являются скалярными функциями скалярных произведений 4-импульсов  $k', k, p$ .

В общем случае вершинная функция пиона может быть записана в виде

$$\Gamma(k; p) = \gamma^5 [f_1(k^2; k \cdot p) + p_\mu \gamma^\mu f_2(k^2; k \cdot p) + k_\mu \gamma^\mu f_3(k^2; k \cdot p) + \sigma_{\mu\nu} k^\mu p^\nu f_4(k^2; k \cdot p)], \quad (3)$$

где матрица  $\gamma^5$  представляет псевдоскалярную природу пиона. В данной работе для простоты учитывается только первая дираковская структура и зависимость  $k^2$  в скалярной функции. Решением в этом случае является

$$\Gamma(k) = N \gamma^5 f(k^2), \quad (4)$$

где нормировочная постоянная  $N$  фиксирована из уравнения сохранения заряда. Простая форма вершинной функции БС оправдана малым значением массы пиона, но полная форма (3) также должна быть где-то исследована. Пропорциональность вершинной функции БС функции ядра взаимодействия объясняет выбор формы уравнения (1).

Скалярная часть вершинной функции выбирается в простом монополярном виде:

$$f(k^2) = \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}. \quad (5)$$

Параметр  $\Lambda$  (около сотни мегаэлектронвольт) определяет эффективную дальность взаимодействия.

## 2. ПИОННЫЕ КОНСТАНТЫ И ФОРМФАКТОРЫ

В статье анализируются следующие пионные константы: постоянная слабого распада  $f_\pi$ , ширина двухфотонного распада  $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$ , переходный радиус  $r_{\pi\gamma}$  и зарядовый радиус  $\langle r_\pi^2 \rangle$ .

Также рассчитываются формфактор  $\gamma^*\pi^0 \rightarrow \gamma$  перехода  $F_{\pi\gamma}$  и упругий зарядовый формфактор, который состоит из двух частей, релятивистского импульсного приближения (RIA) и тока взаимодействия (int) —  $F_\pi(q^2) = F_\pi^{\text{RIA}}(q^2) + F_\pi^{\text{int}}(q^2)$ .

Все выражения для рассматриваемых наблюдаемых величин можно найти в [21, 22]. Для всех констант, кроме упругого формфактора, обнаружено полное соответствие полученных результатов предыдущим.

При вычислении части взаимодействия  $F_\pi^{\text{int}}$  упругого формфактора обнаружена разница в результатах. Чтобы убедиться в том, что численные методы верны для четырехмерных интегралов, используются три альтернативных численных метода. Первый основан на теореме Коши и вычисляет вычеты в полюсах  $k_0$ , которые определяются бесконечно малыми добавками в верхней комплексной полуплоскости. Затем вычисляется трехмерный интеграл по модулю 3-импульса  $k$  и  $\cos \theta_k$ ,  $\phi_k$ . Второй основан на параметризации Фейнмана и позволяет выполнить интегрирование по 4-импульсу  $k$ , а затем интеграл вычисляется по параметрам Фейнмана. Третий метод основан на процедуре поворота Вика и позволяет вычислить четырехмерный интеграл в евклидовом пространстве с дополнительными трехмерными интегралами в точках полюсов  $k_0$ , которые появляются в первом и третьем квадрантах ( $k_0 = ik_4$ ):

$$\begin{aligned} 4\pi i \int dk_0 \int_0^{+\infty} k^2 dk \int_{-1}^{+1} d \cos \theta_k [f(k_0, k, \cos \theta_k)] = \\ = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dk_4 \int_0^{+\infty} k^2 dk \int_{-1}^{+1} d \cos \theta_k [f(k_4, k, \cos \theta_k)] + \\ + 2\pi i \sum_n \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} k^2 dk \int_{\cos \theta_{k_{\min}}}^{\cos \theta_{k_{\max}}} d \cos \theta_k \text{Res}_n[f(k_0^n, k, \cos \theta_k)]. \end{aligned}$$

Результаты трех вышеупомянутых методов были тщательно сопоставлены. На рис. 1 показано сравнение описанных численных методов для  $F_{\pi}^{\text{RIA}}$  и  $F_{\pi}^{\text{int}}$  соответственно. Сплошная линия представляет результаты метода поворота Вика без дополнительного вклада полюсов (WRMwp), штриховая линия — это метод, основанный на теореме Коши (CTM), штрихпунктирная линия — метод фейнмановских параметров (FPM), а пунктирная линия — метод полного поворота Вика (WRM).

Как видно из рисунка, формфакторы, рассчитанные тремя численными методами, совпадают в пределах статистической погрешности. Для метода поворота Вика представлены две кривые: общий результат (штрихпунктирная линия) и результат без учета дополнительных трехмерных интегралов (сплошная линия) в первом и третьем квадрантах. Разница очевидна. Кроме того, на рис. 2 показано сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [21, 22] для трех наборов параметров модели. Кривые 1, 2 и 3 — это результаты наших расчетов для наборов I, II, III соответственно, представленных в таблице. Кривые 4, 5 и 6 — это результаты расчетов, которые были получены в [21, 22] с теми же наборами параметров модели. Вклады RIA в упругий формфактор полностью совпадают, в то время как вклад тока взаимодействия имеет противоположный знак и отличается по поведению.

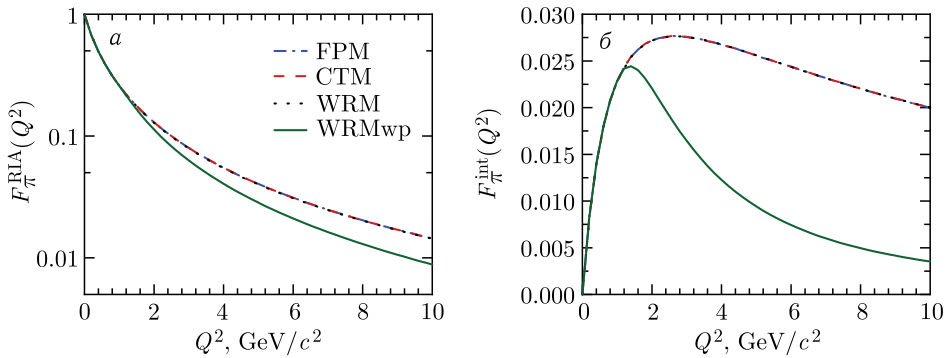


Рис. 1. Сравнение трех численных методов для вклада RIA (а) и тока взаимодействия (б) в зарядовый формфактор пиона

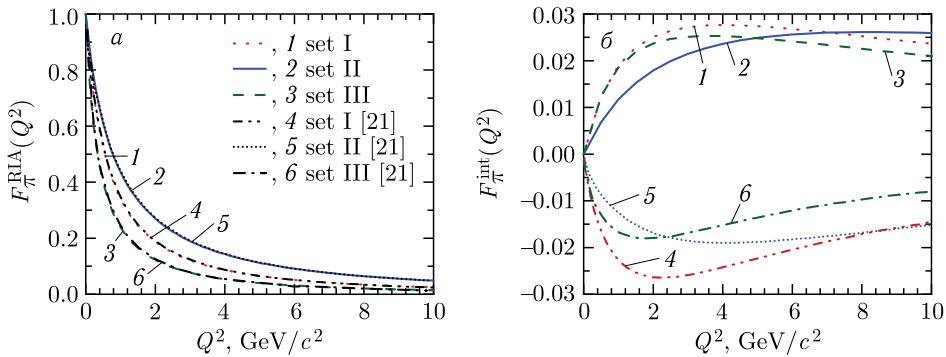


Рис. 2. Сравнение результатов расчетов с результатами, приведенными в [21]. Вклады RIA (а) и тока взаимодействия (б)

### 3. ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Параметры модели (три набора) из [21] использовались для расчета пионных констант и их сравнения с результатами этой статьи. Было найдено хорошее соответствие для всех констант, за исключением радиуса заряда. Рассчитанные значения приведены в таблице — наборы I, II, III. Видно, что значения констант сильно отличаются от экспериментальных данных. Чтобы уменьшить разницу, были найдены новые наборы параметров. Первый из них (набор IV) был получен путем описания экспериментальных данных только для констант  $f_\pi$  и  $r_{\pi\gamma}$ . Он идеально описывает две константы, однако дает неверное значение для  $\langle r_\pi^2 \rangle$ . Таким образом, был создан новый набор (V) путем описания констант  $f_\pi$ ,  $r_{\pi\gamma}$ ,  $\langle r_\pi^2 \rangle$  и  $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$ . Он описывает эти константы с точностью менее 10% от экспериментальных данных. Конституентная масса кварка  $m$  является одним из двух параметров модели, которые фиксируются статическими параметрами пиона.

Формфакторы пиона рассчитаны с использованием наборов IV и V. На рис. 3 показаны полученные результаты для зарядового формфактора  $F_\pi(Q^2)$  (а: экспериментальные данные взяты из: треугольники — [23], кружки — [24], ромбы — [25]) и для переходного формфактора  $F_{\pi\gamma}(Q^2)$  (б: экспериментальные данные взяты из: ромбы — [26], треугольники — [27], кружки — [28], квадраты — [29]) с экспериментальными данными. На графике видно, что оба набора хорошо описывают поведение переходного формфактора, но набор V лучше описывает последние экспериментальные данные для зарядового формфактора.

Параметры модели  $m, \Lambda$  и наблюдаемые  $f_\pi, r_{\pi\gamma}, \langle r_\pi^2 \rangle, \Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$

Набор	$m$ , МэВ	$\Lambda$ , МэВ	$f_\pi$ , МэВ	$r_{\pi\gamma}$ , ФМ	$\langle r_\pi^2 \rangle$ , ФМ <sup>2</sup>	$\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$ , МэВ
I	300,0	500,0	152,74	0,575	0,400	5,633
II	300,0	750,0	175,00	0,541	0,308	5,269
III	200,0	500,0	115,78	0,815	0,708	11,828
IV	265,0	403,0	130,46	0,660	0,549	7,252
V	260,0	550,0	143,37	0,639	0,459	7,249
Exp.			$130,41 \pm 0,0002$	$0,659 \pm 0,004$	0,430	$7,57 \pm 0,03$

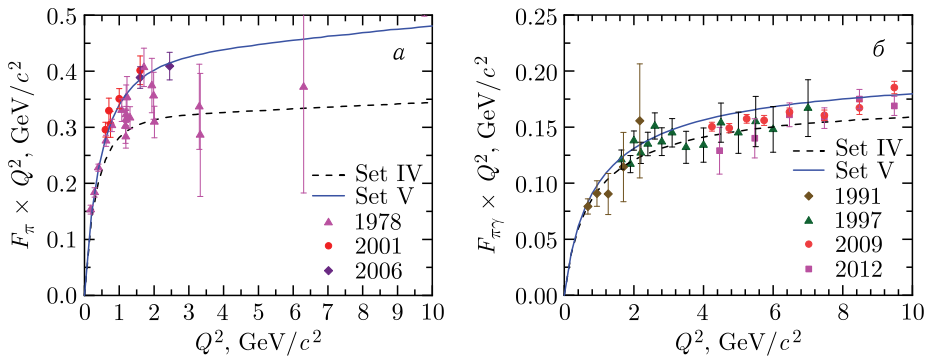


Рис. 3. Зарядовый формфактор  $F_\pi(Q^2)$  (а) и переходный формфактор  $F_{\pi\gamma}(Q^2)$  (б)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривалась модель пиона в рамках подхода Бете–Солпитера с сепарабельным ядром кварк-антикваркового взаимодействия. Полученное аналитическое решение для вершинной функции пиона было использовано для вычисления статических и динамических наблюдаемых величин.

Для расчета упругого формфактора пиона были применены три независимых численных метода, и была обнаружена разница с предыдущими результатами [21] для тока взаимодействия. С использованием правильного для него результата был получен новый набор параметров модели ( $m = 260$  МэВ,  $\Lambda = 550$  МэВ). Этот набор описывает статические константы с отличием менее чем на 10% от экспериментальных данных. Формфакторы пиона (упругий и переходный) хорошо согласуются с последними экспериментальными данными.

Результаты очень чувствительны к значениям параметров модели. Также планируется исследовать влияние формы радиальной части вершинной функции.

**Финансирование.** Эта работа поддерживалась постоянным финансированием Объединенного института ядерных исследований. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство этим конкретным исследованием получено не было.

**Конфликт интересов.** Авторы этой работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nesterenko V. A., Radyushkin A. V.* Sum Rules and Pion Form-Factor in QCD // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 115. P. 410.
2. *Godfrey S., Isgur N.* Mesons in a Relativized Quark Model with Chromodynamics // *Phys. Rev. D.* 1985. V. 32. P. 189–231.
3. *Jacob O. C., Kisslinger L. S.* Confining Bethe–Salpeter Equation: A Light Front Formalism // 3rd Lake Louise Winter Institute on QCD: Theory and Experiment. 1988.
4. *Nambu Y., Jona-Lasinio G.* Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1 // *Phys. Rev.* 1961. V. 122. P. 345–358.
5. *Zhang J. L., Wu J.* Pion–Photon and Kaon–Photon Transition Distribution Amplitudes in the Nambu–Jona-Lasinio Model. arXiv:2402.12757. 2024.
6. *Anikin I. V., Ivanov M. A., Kulimanova N. B., Lyubovitskij V. E.* The Extended Nambu–Jona-Lasinio Model with Separable Interaction: Low-Energy Pion Physics and Pion Nucleon Form Factor // *Z. Phys. C.* 1995. V. 65. P. 681–690.
7. *Bernard V.* Remarks on Dynamical Breaking of Chiral Symmetry and Pion Properties in the Nambu and Jona-Lasinio Model // *Phys. Rev. D.* 1986. V. 34. P. 1601–1605.
8. *Hatsuda T., Kunihiro T.* Critical Phenomena Associated with Chiral Symmetry Breaking and Restoration in QCD // *Prog. Theor. Phys.* 1985. V. 74. P. 765.
9. *Gross F., Milana J.* A Covariant, Chirally Symmetric, Confining Model of Mesons // *Phys. Rev. D.* 1991. V. 43. P. 2401–2417.
10. *Anikin I. V., Dorokhov A. E., Tomio L.* Pion Structure in the Instanton Liquid Model // *Phys. Part. Nucl.* 2000. V. 31. P. 509–537.
11. *Alexandrou C. et al. (Extended Twisted Mass Collab.).* Pion Transition Form Factor from Twisted-Mass Lattice QCD and the Hadronic Light-by-Light  $\pi^0$ -Pole Contribution to the Muon  $g-2$  // *Phys. Rev. D.* 2023. V. 108, No. 9. P. 094514; arXiv:2308.12458.

12. *Gérardin A., Meyer H.B., Nyffeler A.* Lattice Calculation of the Pion Transition Form Factor with  $N_f = 2 + 1$  Wilson Quarks // *Phys. Rev. D.* 2019. V.100, No.3. P.034520; arXiv:1903.09471.
13. *Maris P., Tandy P.C.* The  $\pi$ ,  $K^+$ , and  $K^0$  Electromagnetic Form Factors // *Phys. Rev. C.* 2000. V.62. P.055204; arXiv:nucl-th/0005015.
14. *Kekez D., Klabučar D.* Pion Observables Calculated in Minkowski and Euclidean Spaces with Ansätze for Quark Propagators // *Phys. Rev. D.* 2023. V.107, No.9. P.094025; arXiv:2006.02326.
15. *Hernández-Pinto R.J., Gutiérrez-Guerrero L.X., Bashir A., Bedolla M.A., Higuera-Angulo I.M.* Electromagnetic Form Factors and Charge Radii of Pseudoscalar and Scalar Mesons: A Comprehensive Contact Interaction Analysis // *Phys. Rev. D.* 2023. V. 107, No. 5. P. 054002; arXiv:2301.11881.
16. *Friesen A., Kalinovsky Yu., Khmelev A.* Heavy Mesons in an Effective Quark Model with a Nonlocal Interaction. 2025. V.5; arXiv:hep-ph/2505.24542.
17. Precision Measurement of the Neutral Pion Transition Form Factor.  
<https://misportal.jlab.org/mis/physics/experiments/viewProposal.cfm?paperId=1071>.
18. Measurement of the Charged Pion Form Factor to High  $Q^2$ .  
<https://misportal.jlab.org/mis/physics/experiments/viewProposal.cfm?paperId=680>.
19. Study of the L–T Separated Pion Electroproduction Cross Section at 11 GeV and Measurement of the Charged Pion Form Factor to High  $Q^2$ .  
<https://misportal.jlab.org/mis/physics/experiments/viewProposal.cfm?paperId=970>.
20. Determining the Pion Form Factor from Higher  $Q^2$ , High- $t$  Electroproduction Data.  
<https://misportal.jlab.org/mis/physics/experiments/viewProposal.cfm?paperId=904>.
21. *Ito H., Buck W., Gross F.* Electromagnetic Properties of the Pion as a Composite Nambu–Goldstone Boson // *Phys. Rev. C.* 1992. V.45. P.1918–1934.
22. *Ito H., Buck W., Gross F.* Current Conservation and Interaction Currents with Relativistic Separable Interactions // *Phys. Rev. C.* 1991. V.43. P.2483–2498.
23. *Bebek C.J. et al.* Electroproduction of Single Pions at Low Epsilon and a Measurement of the Pion Form Factor up to  $q^2 = 10 \text{ GeV}^2$  // *Phys. Rev. D.* 1978. V.17. P.1693.
24. *Volmer J. et al. (Jefferson Lab  $F(\pi)$  Collab.).* Measurement of the Charged Pion Electromagnetic Form Factor // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V.86. P.1713–1716; arXiv:nucl-ex/0010009.
25. *Horn T. et al. (Jefferson Lab  $F(\pi)$  Collab.).* Determination of the Charged Pion Form Factor at  $Q^2 = 1.60$  and  $2.45 \text{ (GeV/c)}^2$  // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V.97. P.192001; arXiv:nucl-ex/0607005.
26. *Behrend H.J. et al. (CELLO Collab.).* A Measurement of the  $\pi^0$ ,  $\eta$  and  $\eta'$  Electromagnetic Form-Factors // *Z. Phys. C.* 1991. V.49. P.401–410.
27. *Gronberg J. et al. (CLEO Collab.).* Measurements of the Meson–Photon Transition Form-Factors of Light Pseudoscalar Mesons at Large Momentum Transfer // *Phys. Rev. D.* 1998. V.57. P.33–54; arXiv:hep-ex/9707031.
28. *Aubert B. et al. (BaBar Collab.).* Measurement of the  $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$  Transition Form Factor // *Phys. Rev. D.* 2009. V.80. P.052002; arXiv:0905.4778 [hep-ex].
29. *Uehara S. et al. (Belle Collab.).* Measurement of  $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$  Transition Form Factor at Belle // *Phys. Rev. D.* 2012. V.86. P.092007; arXiv:1205.3249 [hep-ex].