

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПУЧКА, СФОРМИРОВАННОГО ИЗ РАДИОИЗОТОПНОГО ИСТОЧНИКА ПОЗИТРОНОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКОЙ

*В. Г. Куракин*¹

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

В прошлом в экспериментах с электронными пучками наблюдалось их частичное отражение при наклонном падении на фольгу. Данный эффект исследовался теоретически методами стохастической электронной оптики, и было показано, в частности, что коэффициент отражения и средний угол отраженного пучка не зависят от параметров пучка и материала отражающей среды. В данной работе динамика пучка, падающего из вакуума наклонно на плоскую границу между средой и вакуумом, исследуется более детально. С использованием модели линий тока получена функция распределения пучка на указанной границе. Это позволяет детально исследовать динамику отраженного пучка. Одновременно доказано, что функция распределения для полубесконечной среды совпадает с таковой для безграничной среды, что является обоснованием разработанной ранее модели линий тока для многократного кулоновского рассеяния. Выводится дифференциальное уравнение, описывающее поверхность вращения для формирования пучка из точечного изотропного источника, и приводится его решение. Исследуется фазовая динамика потока зарядов, сформированного отражающей поверхностью.

In the past, in experiments with electron beams, their partial reflection was observed when falling obliquely on the foil. This effect was studied theoretically by stochastic electron optics methods and it was shown, in particular, that the reflection coefficient and the average angle of the reflected beam do not depend on the parameters of the beam and the material of the reflecting medium. In this paper, the dynamics of a beam falling obliquely from a vacuum onto a flat boundary between a medium and a vacuum is studied in more detail. Using the model of flow lines, the beam distribution function at the specified boundary is obtained. This makes it possible to study the dynamics of the reflected beam in detail. At the same time, it is proved that the distribution function for a semi-infinite medium coincides with that for an infinite medium, which is the justification for the previously developed model of flow lines for multiple Coulomb scattering. A differential equation describing the surface of rotation for the formation of a beam from a point isotropic source is derived and its solution is given. The phase dynamics of the charge flow formed by the reflecting surface is investigated.

PACS: 41.85.–p

¹E-mail: vgkurakin@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

Понятие стохастической электронной оптики (стохастической оптики пучков заряженных частиц) было введено в оборот в работах [1, 2]. В них теоретически были исследованы законы преобразования фазового портрета пучка заряженных частиц при его распространении в материальной среде, а также эффекты преломления и частичного отражения пучка при его наклонном падении на материальную пластинку. Упомянутые эффекты наблюдались ранее при работе с пучками при их выводе через фольгу из ускорителя, а также были исследованы экспериментально в ФИАН на электронном пучке микротрона. В основу теоретического анализа была положена функция распределения для многократного кулоновского рассеяния, являющаяся решением соответствующего дифференциального уравнения с частными производными для безграничной рассеивающей среды [3]. Для корректного учета границ, расположенных под углом к направлению распространения пучка, была предложена модель линий тока. Собственно, данная модель и позволила объяснить наблюдавшиеся явления частичного отражения и преломления пучка при пересечении последним установленной на пути пучка фольги, а также предложить способы формирования и мониторинга пучков [4].

Данная работа представляет собой дальнейшее развитие проведенных ранее теоретических исследований по формированию пучков. Приводится математическое обоснование предложенной ранее концепции для случая отражения пучка при его наклонном падении на рассеивающую среду. Полученная при этом функция распределения пучка на границе среды и вакуума используется для вывода законов отражения. Исследуются геометрические характеристики пучка в предложенной ранее схеме формирования пучка из изотропного источника заряженных частиц.

1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАССЕЯННЫХ ЗАРЯДОВ В СРЕДЕ И НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ СРЕДОЙ И ВАКУУМОМ ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ ПУЧКА НА СРЕДУ

Основным процессом, определяющим динамику пучка заряженных частиц в материальной среде, будем считать многократное кулоновское рассеяние частиц пучка на ядрах и атомах среды. Уравнение, описывающее этот процесс, имеет вид [3]

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\theta \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\Theta_s^2}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}. \quad (1)$$

Используется система координат, в которой ось x совпадает с направлением распространения пучка, ось y — любая из поперечных координат, θ — угол в плоскости (x, y) между направлением движения рассеянного заряда и осью x . Решение данного уравнения для безграничной однородной среды имеет вид [3]

$$P(x, y, \theta) dy d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\Theta_s^2 x^2} \exp \left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left(\theta^2 - \frac{3y\theta}{x} + \frac{3y^2}{x^2} \right) \right] dy d\theta. \quad (2)$$

Здесь $P(x, y, \theta) dy d\theta$ — вероятность обнаружить рассеянный заряд в интервалах $(y, y + dy)$, $(\theta, \theta + d\theta)$ поперечного смещения и угла. Предполагается, что частицы пучка несут элементарный заряд, а величину Θ_s удобно выражать через параметры,

описывающие радиационные процессы в веществе

$$\Theta_s^2 = \left(\frac{E_s}{\beta c p} \right)^2 \frac{1}{X_0}, \quad E_s = \left(\frac{4\pi}{\alpha} \right)^{1/2} m_e c^2 = 21 \text{ МэВ}, \quad (3)$$

где β, p, c — относительная скорость, импульс частицы и скорость света соответственно; X_0 — радиационная длина; $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры; e, m_e — заряд и масса электрона соответственно; \hbar — постоянная Планка.

Исследуем, как это было заявлено во введении, динамику пучка заряженных частиц при его падении под некоторым углом на материальную среду, как это схематично изображено на рис. 1. Распространяющийся в вакууме в направлении оси x пучок входит в рассеивающую среду, плоская граница между средой и вакуумом, точнее, ее проекция на плоскость рисунка, описывается прямой $y = kx$, угол между пучком и границей среды $\varphi = \arctg(k)$. Отметим сразу, что неправомечно для получения распределения рассеянных частиц пучка на указанной прямой просто подставить уравнение данной прямой в формулу (1), даже если рассеивающая среда заполняет все пространство, и по этой причине отсутствует влияние границы, а пучок просто стартует из начала координат. Дело в том, что (2) — функция распределения двух переменных — y и θ — в то время как x выступает лишь в качестве параметра. Тем не менее распределение зарядов на прямой можно найти, используя концепцию линий тока [1, 2, 4].

Для начала предположим, что имеем безграничную среду. Проинтегрировав (2) по всем углам, получим функцию распределения рассеянных частиц по поперечной координате

$$S(x, y) dy = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Theta_s x^{3/2}} \exp\left(-\frac{3y^2}{\Theta_s^2 x^3}\right) dy, \quad (4)$$

из которой следует формула для вероятности обнаружить рассеянный заряд в диапазоне от 0 до y

$$W(x, y) = \int_0^y S(x, \xi) d\xi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Theta_s x^{3/2}} \int_0^y \exp\left(-\frac{3\xi^2}{\Theta_s^2 x^3}\right) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}y}{\Theta_s x^{3/2}}} \exp(-t^2) dt. \quad (5)$$

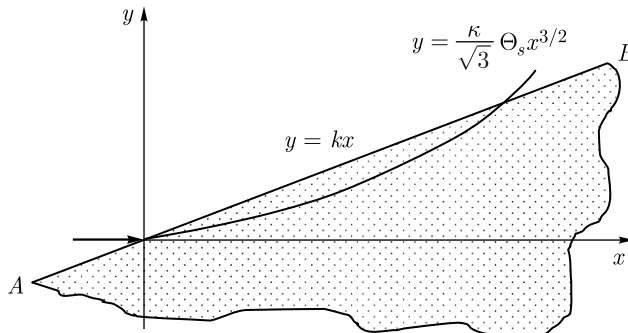


Рис. 1. Схема, поясняющая формирование отраженного пучка при падении на материальную среду под некоторым углом пучка заряженных частиц из вакуума с использованием концепции линий тока

(По причине, ясной из последующего, рассматриваем только положительные значения y .) Из последнего соотношения следует, что данная вероятность постоянна вдоль линии (линия тока)

$$\frac{\sqrt{3}y}{\Theta_s x^{3/2}} = \kappa, \quad (6)$$

где $\kappa = \text{const}$, $0 < \kappa < \infty$, и любая из этих линий с определенным значением κ и осью координат x определяет область, где данная вероятность $W(x, y) = W(\kappa)$. Любая точка линии $y = kx$ для значений x

$$x > x_\kappa = \frac{3k^2}{\kappa^2 \Theta_s^2}, \quad (7)$$

где x_κ — точка пересечения указанной линии и данной прямой, принадлежащая отмеченной области, и по этой причине вероятность обнаружить рассеянную частицу на прямой для значений $x > x_\kappa$ равна $W(\kappa)$.

Поскольку распределение (5) нормировано на единицу, что означает, что вероятность обнаружить рассеянную частицу где-либо на любой глубине равна единице, то вероятность обнаружить частицу только для положительных значений y равна половине. То есть половине равна вероятность обнаружить рассеянный заряд где-либо на прямой $y = kx$. Отсюда следует, что

$$W(x < x_\kappa) = \frac{1}{2} - W(\kappa). \quad (8)$$

Плотность рассеянных зарядов на прямой $y = kx$ очевидно равна

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{dW(x < x_\kappa)}{dx} = -\frac{dW(\kappa)}{d\kappa} \frac{d\kappa}{dx} = \frac{k\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}\Theta_s x^{3/2}} \exp(-\kappa^2) = \\ &= \frac{k\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}\Theta_s x^{3/2}} \exp\left(-\frac{3k^2}{\Theta_s^2 x}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнивая (9) и (4) после подстановки в последнее выражение уравнения прямой, отметим, что данные выражения совпадают с точностью множителя 1/2. Однако, если принимать во внимание только положительные значения поперечной координаты, которые нас только и интересуют (только в этом случае прямая и любая из линий (6) пересекаются), это различие в нормировке исчезает. Аналогичное заключение можно сделать и относительно полной функции распределения рассеянных зарядов на прямой. Чтобы получить выражение для нее, достаточно подставить в соотношение (2) уравнение прямой, разделив результат на два. Удобно представить эту функцию в виде

$$\rho(x, \theta) dx d\theta = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{k}{\Theta_s^2 x^2} \exp\left(-\frac{3k^2}{\Theta_s^2 x}\right) \exp\left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left(\theta - \frac{3k}{2}\right)^2\right] dx d\theta. \quad (10)$$

Проинтегрировав для проверки (10) по переменной θ в интервале $(-\infty, +\infty)$, как это было сделано при выводе (4) [3], приходим в итоге к (9).

Вернемся теперь к нашей задаче в ее исходной формулировке, т.е. считаем, что игольчатый пучок под углом $\varphi = \text{arctg}(k)$ входит из вакуума в материальную среду, как это схематически представлено на рис. 1. Утверждается, что стохастическая динамика в среде описывается, как и в случае безграничной среды, функцией распределения (2). При этом на границе среды и вакуума установится распределение,

описываемое соотношением (10). Действительно, согласно теории уравнений с частными производными решение краевой задачи должно удовлетворять уравнению во внутренних точках области и совпадать с заданной функцией на границе области после подстановки в решение функции, описывающей границу. В данном случае, как мы убедились выше при построении распределения рассеянных зарядов на прямой в случае безграничной среды, это имеет место.

2. ЗАКОНЫ ОТРАЖЕНИЯ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ЕГО НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ НА МАТЕРИАЛЬНУЮ СРЕДУ

Имея функцию распределения рассеянных зарядов на интерфейсной прямой, разделяющей материальную среду и вакуум, легко получить законы отражения игольчатого пучка заряженных частиц при его наклонном падении на материальную среду. Подчеркнем еще раз, что, говоря о прямой, разделяющей среду и вакуум, мы имеем в виду плоскость, разделяющую среду и вакуум, а прямая есть проекция этой плоскости на плоскость рисунка. Очевидно, что коэффициент отражения определяется соотношением

$$R = \int_{\phi}^{\phi+\pi} \int_0^{\infty} \rho(x, \theta) dx d\theta = \int_{\phi}^{\phi+\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{3}k}{\pi\Theta_s^2 x^2} \exp\left(-\frac{3k^2}{\Theta_s^2 x}\right) \exp\left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left(\theta - \frac{3k}{2}\right)^2\right] dx d\theta, \quad (11)$$

т. е. равен относительному числу рассеянных зарядов, вылетающих с границы области, занимаемой веществом, в сторону вакуума. Производя интегрирование сначала по переменной x , а затем по переменной θ , получим

$$R = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}k} \left(\pi + \phi - \frac{3k}{2}\right) + \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}k} \left(\frac{3k}{2} - \phi\right) \right]. \quad (12)$$

При малых углах падения $\varphi \ll 1$, как это следует из формулы, имеем простое соотношение

$$R = \frac{1}{3}. \quad (13)$$

То есть при малых углах падения коэффициент отражения вообще не зависит от этого угла. Отметим также, что коэффициент отражения не зависит от параметра Θ_s , характеризующего среду и параметры частиц, образующих пучок.

Средний угол вылетающих в сторону вакуума со всей границы рассеянных частиц определяется соотношением

$$\langle \theta \rangle = \frac{\int_{\phi}^{\phi+\pi} \int_0^{\infty} \theta \rho(x, \theta) dx d\theta}{\int_{\phi}^{\phi+\pi} \int_0^{\infty} \rho(x, \theta) dx d\theta} = \frac{1}{R} \int_{\phi}^{\phi+\pi} \int_0^{\infty} \theta \rho(x, \theta) dx d\theta. \quad (14)$$

в материаловедении. Здесь мы дадим вывод соответствующего дифференциального уравнения, описывающего форму поверхности.

Схема формирования пучка приведена на рис. 2. Отражающая поверхность образована вращением утолщенной линии вокруг оси OY , точечный изотропный источник частиц находится в начале координат. $Y = L_0$ — точка фокуса в представлении геометрической оптики. Штриховая линия — касательная к образующей, проведенная в точке падения луча. Имеют место следующие соотношения:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{L_0 - y} \right), \quad (16)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{dy}{dx},$$

из которых после элементарных преобразований получаем дифференциальное уравнение образующей искомой поверхности вращения

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{\pi}{2(1 + \lambda)} + \frac{1}{1 + \lambda} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{L_0 - y} \right) \right). \quad (17)$$

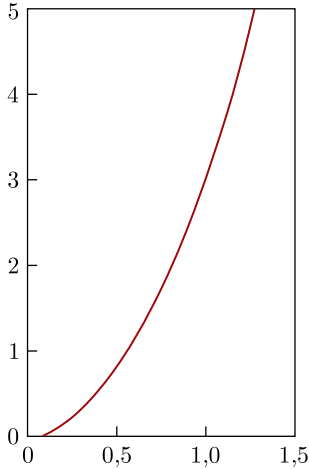


Рис. 3. Образующая отражающей поверхности

При выводе уравнения мы считали, что $\chi(\beta) \approx \lambda\beta$, $\lambda \approx 1,4$, в достаточно широком диапазоне углов падения ($k = 0,2-0,3$). Данное уравнение даже в упрощенном виде — нелинейное, численное решение для одного конкретного случая приведено на рис. 3.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СФОРМИРОВАННОГО ПОТОКА ЗАРЯДОВ ОТ ИЗОТРОПНОГО ИСТОЧНИКА

На рис. 3 представлено одно из решений уравнения (17) — график образующей линии, формирующей при вращении ее вокруг вертикальной оси сам рефлектор. Размеры по обоим осям даны в сантиметрах.

При выводе уравнения (17) негласно предполагалось, что луч частиц от источника отражается в месте его падения на поверхность отражателя, в нашем случае просто материальной среды. В общем случае уже из качественных соображений ясно, что это неверно, однако в случае низких энергий такое предположение допустимо, и это показано ниже из численных расчетов для позитронного источника и наглядно представлено на соответствующем рисунке, где расстояние от места падения луча измеряется в десятых и сотых долях миллиметра.

На рис. 4 представлены фазовые портреты рассеянных зарядов для отдельных лучей, падающих на поверхность рассеивающей среды. Они построены в качестве примера для конкретного материала отражателя (алюминия в данном случае) и различных кинетических энергий E_k позитронов — 200 кэВ, примерно равной средней энергии испускаемых позитронов радиоактивного ^{22}Na , и 500 кэВ, близкой к максимальной энергии излучаемых частиц. Их формы близки к эллиптическим, отложенные по вертикальной оси углы (в радианах) измеряются относительно касательной

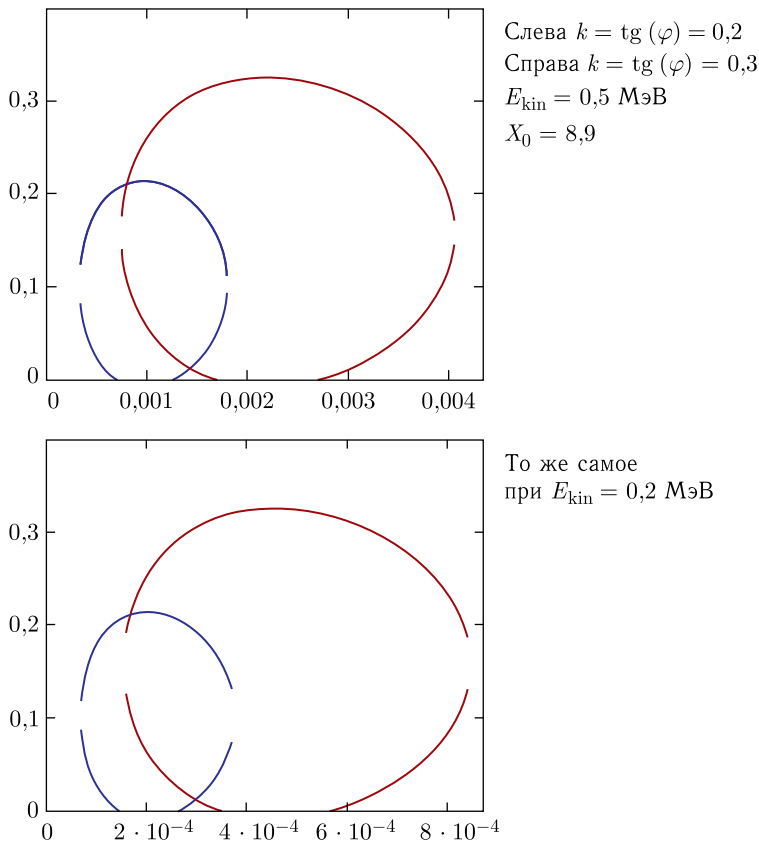


Рис. 4. Фазовые портреты рассеянного пучка на границе между вакуумом и средой. Здесь $k = \operatorname{tg}(\varphi)$, где φ — угол между падающим пучком и границей

к отражающей поверхности. В таком представлении отражаются от поверхности (вылетают в вакуум, не рассеиваются в среду) падающие на нее заряды только с положительными значениями этих углов (они только и изображены на рисунке). Фазовый портрет — это зависимость $\rho(x, \theta) = \rho_c = \text{const}$, причем для всех изображенных случаев значение этой постоянной выбиралось равным половине максимального значения плотности распределения. Из представленных графических зависимостей следует, что в результате отражения исходящих из начала координат лучей зарядов от формирующей поверхности формируется не фокус в точке с координатами $(0, L_0)$, а выходящий из рефлектора широкий поток частиц. Каждый элемент рефлектора можно рассматривать как точечный источник, излучающий в широкий конус (доли радиан) поток отраженных частиц. Качественно этого следовало ожидать, ведь сам механизм отражения обусловлен множественным рассеянием игольчатых лучей зарядов в среде. Представленные зависимости отражают значения k (рассчитанные) для рассмотренного случая отражателя — от $k = 0,3$ у дна отражателя до $k = 0,2-0,14$ в его основной части (от 1 до 5 см по высоте). Отметим также, что часть потока от кон-

кретного точечного элемента отражателя, соответствующего углам ближе к нулевым значениям, снова попадает на стенку отражателя и снова частично отражается от нее из-за кривизны образующей. Имея в распоряжении функцию распределения на интерфейсной плоской границе, процесс формирования потока от изотропного источника можно описать максимально подробно. Потoki от отдельных элементов поверхности отражателя складываются в любом горизонтальном сечении, и можно рассчитать эффективность сбора зарядов от изотропного источника в выходном сечении отражателя, понимаемую как доля зарядов в данном сечении относительно полного количества зарядов, испускаемых в верхнюю полусферу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными теоретическими результатами данной работы следует считать:

— вывод функции распределения зарядов на плоской границе между материальной средой и вакуумом при наклонном падении пучка заряженных частиц на данную границу из вакуума. Данная функция позволяет насколько возможно подробно описать динамику отраженного пучка;

— точное решение уравнения (1), описывающего процесс многократного кулоновского рассеяния движущегося заряда, для полубесконечной среды при наклонном падении заряда на границу раздела из вакуума. Оказывается, что данное решение совпадает с таковым для безграничной среды. Тем самым дано математическое обоснование метода линий тока.

К практически значимым результатам и как к очередному шагу следует отнести выяснение возможностей предложенной ранее схемы формирования пучка позитронов из радиоизотопного изотропного источника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куракин В. Г., Куракин П. В.* О теоретических основах стохастической оптики пучков заряженных частиц // Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 7(219). С. 719–725.
2. *Куракин В. Г., Куракин П. В.* Механизмы отражения и преломления пучка заряженных частиц в рассеивающей среде // ЖТФ. 2019. Т. 89, вып. 12. С. 1843–1846.
3. *Росси Б.* Частицы больших энергий: Пер. с англ. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 536 с.
4. *Куракин В. Г.* Использование явлений и законов стохастической электронной оптики для формирования и мониторинга пучков заряженных частиц // Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 4(249). С. 881–887.

Получено 15 сентября 2023 г.