

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАГАДОЧНОГО КИРАЛЬНОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА КХД ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

У Цзинсюй^{1,}, Ли Чэньцзя¹, Ван Ян², Хэ Ифань²*

¹ Физический факультет Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

² Школа физических наук и технологий, Университет Ланьчжоу,
Ланьчжоу, 730000, Китай

Предлагается всесторонний обзор последних технологических достижений, касающихся критической точки фазового перехода киральной симметрии, с особым акцентом на эффективные полевые теории в квантовой хромодинамике. Описываются тонкости этих ключевых точек с использованием теоретических инструментов для изучения связанных явлений.

This paper provides a comprehensive review of the latest technological advancements regarding the critical point of the chiral symmetry phase transition, with a particular focus on effective field theories in quantum chromodynamics. It delves into the intricacies of these key points, utilizing theoretical tools to study the associated phenomena.

PACS: 44.25.+f; 44.90.+c

ВВЕДЕНИЕ

В современных научных исследованиях квантовая хромодинамика (КХД) играет ключевую роль как фундаментальная теория, раскрывающая внутреннюю структуру и взаимодействия адронов. КХД представляет основу для понимания сильных взаимодействий между кварками и глюонами, предлагая важные теоретические положения для изучения высокоэнергетической физики, космологии и ядерной физики [1–6].

В контексте сложности КХД выделяется явление кирального фазового перехода — уникальной перспективы для понимания поведения вещества в экстремальных условиях. Киральный фазовый переход относится к фундаментальному изменению свойств кварковых взаимодействий при конечных температурных условиях [7–12]. Это явление предлагает ценные идеи для ранней эволюции Вселенной и формирования кварк-глюон-

* E-mail: wuxj@my.msu.ru

ной плазмы, которая, как считается, существовала в течение нескольких микросекунд после Большого взрыва.

При нулевой температуре лагранжиан КХД соблюдает киральную симметрию, что означает, что преобразовательные свойства левых и правых кварков идентичны. Однако конечные температурные среды могут нарушить эту симметрию, приводя к спонтанному нарушению киральной симметрии. Это нарушение проявляется на макроскопическом уровне в виде конденсации кварков, что раскрывает наличие кирального конденсата в вакууме. При увеличении температуры системы существенное влияние тепловой среды вызывает изменения в структуре вакуума. При критической температуре, известной как температура фазового перехода киральной фазы (T_c), система КХД проходит фазовый переход. Выше этой критической температуры киральная симметрия восстанавливается и кварковые конденсаты уменьшаются до нуля. Возникновение кирального фазового перехода тесно связано с переходом от адронного вещества к кварк-глюонной плазме, где отличительные свойства кварков и глюонов становятся менее очевидными, напоминая ранние условия во Вселенной в течение нескольких микросекунд после Большого взрыва [13, 14]. Экспериментальные исследования кирального фазового перехода сталкиваются с существенными трудностями из-за необходимости проведения экспериментов в экстремальных условиях. Однако эксперименты по столкновению тяжелых ионов, которые проводятся на Большом адронном коллайдере и релятивистском коллайдере тяжелых ионов, предоставляют ценные возможности для изучения кирального фазового перехода. Исследователи пытаются раскрыть характеристики кирального фазового перехода, анализируя спектры частиц, коллективный поток и другие наблюдаемые величины. Эти исследования способствуют более глубокому пониманию фундаментальных свойств вещества и эволюции Вселенной, а также поведения вещества в условиях экстремальных энергий.

Данная работа посвящена изучению кирального фазового перехода и его близости к критической точке в эффективных теориях КХД. Сосредоточимся на теоретическом каркасе, ключевых концепциях и соответствующем экспериментальном прогрессе с учетом эффективных теорий КХД вблизи критической точки кирального фазового перехода.

Рассмотрим эффективные теории КХД вблизи критической точки кирального фазового перехода. Для КХД с N_f ароматами безмассовых кварков его классический лагранжиан обладает значительными симметриями:

$$G = SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_A(1) \times U_B(1) \times SU_c(3). \quad (1)$$

С учетом динамического нарушения и восстановления симметрий, в предположении, что сектор $U_B(1) \times SU_c(3)$ остается непрерывным, гипотеза может быть нарушена в высококонденситетных цветных сверхпроводниках.

Введем порядковый параметр для киральной симметрии, который является матрицей $N_f \times N_f$ и преобразуется как синглет под $U_B(1) \times SU_c(3)$:

$$\Phi_{ij} \sim \frac{1}{2} \bar{q}^j (1 - \gamma_5) q^i = \bar{q}_R^j q_L^i, \quad (2)$$

где i и j — индексы аромата. Поведение этого порядкового параметра при преобразованиях $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_A(1)$ задается

$$\Phi_{ij} \rightarrow e^{i\alpha V_L} \Phi e^{i\alpha V_R^\dagger}. \quad (3)$$

Здесь $V_L(V_R)$ — элемент $SU_L(N_f)$ ($SU_R(N_f)$), а α — угол поворота $U_A(1)$. Левые и правые кварки преобразуются при том же изменении:

$$q_L \rightarrow e^{-i\alpha/2} V_L q_L, \quad q_R \rightarrow e^{i\alpha/2} V_R q_R. \quad (4)$$

Если киральная симметрия динамически нарушена, то тепловое среднее Φ отлично от нуля.

Разложение Φ представляется в виде

$$\Phi = \sum_{a=0}^{N_f^2-1} \Phi^a \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

1. ФУНКЦИОНАЛ ЛАНДАУ В КХД

Вдохновившись обсуждениями универсальности, используем поле порядкового параметра Φ для построения функционала Ландау $S_{\text{эф}} = \int d^d x \mathcal{L}_{\text{эф}}$, где $\mathcal{L}_{\text{эф}}$ обладает теми же симметриями, что и квантово-хромодинамический лагранжиан. Вблизи критической точки можно разложить Φ , и его форма дана следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{эф}} = & \frac{1}{2} \text{tr} (\Phi^\dagger \Phi) + \frac{a}{2} \text{tr} (\Phi^\dagger \Phi) + \frac{b_1}{4!} (\text{tr} (\Phi^\dagger \Phi))^2 + \\ & + \frac{b_2}{4!} (\text{tr} (\Phi^\dagger \Phi))^2 - \frac{c}{2} (\det \Phi + \det \Phi^\dagger) - \frac{1}{2} \text{tr} (h(\Phi + \Phi^\dagger)). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь tr и \det действуют на индексы аромата. Первые четыре члена с правой стороны уравнения (6) обладают симметрией $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_A(1)$. Пятый член включает детерминантную структуру, действующую как оператор, сохраняющий симметрию $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$, но нарушающий симметрию $U_A(1)$; этот член обеспечивает аксиальную аномалию в КХД. Последний член в уравнении (6) возникает из кварковых масс, где $h \propto \text{diag} (m_u, m_d, m_s, \dots)$, и он явно нарушает симметрии $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$ и $U_A(1)$.

Если система проявляет фазовый переход второго порядка, то поле Φ вблизи критической точки проявит мягкие моды с расходящимися корреляционными длинами. Моды с конечными корреляционными длинами

будут интегрированы в путь в интеграле, что повлияет на коэффициенты a , b_1 , b_2 , c и h . Существование мягких мод, таких как векторные мезоны, с лоренцевским векторным характером является сложным вопросом.

2. АНОМАЛЬНАЯ БЕЗМАССОВАЯ КХД С АКСИАЛЬНОЙ АНОМАЛИЕЙ

Когда кварки считаются безмассовыми, изучение аномальной безмассовой КХД с аксиальной аномалией включает в себя рассмотрение влияния аксиальных аномалий в КХД. Это может привести к интересным явлениям, связанным с нарушением киральной симметрии — важным аспектом понимания поведения кварков в вакууме КХД.

2.1. Безмассовая КХД без аксиальной аномалии. Для систематического изучения фазовой структуры L_{eff} сначала рассмотрим случай, когда в уравнении (6) $c = 0$ и $h = 0$. В этом сценарии L_{eff} обладает симметрией $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_A(1)$.

Для больших значений Φ , если $(b_1 + b_2)/(N_f) > 0$, L_{eff} не имеет нижней границы. При таких условиях изменение знака a в теории среднего поля приводит к фазовому переходу второго порядка. Устанавливая $c = h = 0$ в уравнении (6) и переписывая его с $S^0 (= \Phi^0)$, мы можем продемонстрировать вышеуказанный вывод, сравнив его с уравнением

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}a\sigma^2 + \frac{1}{4}b\sigma^2 - h\sigma^2. \quad (7)$$

Однако с учетом тепловых флуктуаций Φ могут происходить множественные фазовые переходы. Чтобы проиллюстрировать это, используем константы связи $g_1, g_2 = b_1, b_2 S_d / (2\pi)^2$ для выражения β -функций следующего порядка:

$$\beta_1 = -\epsilon g_1 + \frac{(N_f^2 + 4)}{3}g_1^2 + \frac{4N_f}{3}g_1 g_2 + g_2^2, \quad (8)$$

$$\beta_2 = -\epsilon g_2 + 2g_1 g_2 + \frac{2N_f}{3}g_2^2. \quad (9)$$

Это результаты однопетлевого эффективного действия, и вычисления выполняются в точке фазового перехода, где $a = 0$, с четырехточечными вершинами, пропорциональными b_1, b_2 . Для различного количества ароматов уравнения (8) и (9) показывают различные потоки ренормализации.

- Для $N_f = 1$. В этом случае уравнение (8) (с $c = h = 0$) эквивалентно обсуждению критических показателей симметричной модели Φ^4 с $O(N)$ -симметрией и одной четной константой связи $b \equiv b_1 + b_2$ и симметрией $O(2)$. Легко видеть, что фиксированная точка $g^* = 3\epsilon/5$ инфракрасно стабильна. Это указывает на то, что фазовый переход

Таблица 1. Критические показатели модели Φ^4 с симметрией $O(N)$

Показатель	МФ	Разложение по ϵ (до $O(\epsilon)$)	Разложение по ϵ ($N = 4$, ресуммировано)	МК ($N = 4$, $d = 3$)
α	0	$-(N - 4)/(2(N + 8))\epsilon$	$-0,211(24)$	$-0,247(6)$
β	$1/2$	$1/2 - 3/(2(N + 8))\epsilon$	$0,382(4)$	$0,388(1)$
γ	1	$1 + (N + 2)/(2(N + 8))\epsilon$	$1,447(16)$	$1,471(4)$
δ	3	$3 + \epsilon$	$4,792(19)$	$4,789(5)$
ν	$1/2$	$1/2 + (N + 2)/(4(N + 8))\epsilon$	$0,737(8)$	$0,749(2)$
η	0	0	$0,0360(40)$	$0,0365(10)$
ω	—	$+\epsilon$	$0,795(30)$	$0,765$

является переходом второго порядка, с критическими показателями, приведенными для $N = 2$ в табл. 1.

• Для $N_f \geq 2$. В этом сценарии b_1 и b_2 являются независимыми константами связи и уравнение (6) (с $c = h = 0$) имеет симметрию $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_A(1)$. Существуют два решения с $\beta_1 = \beta_2 = 0$: $g^* = (0, 0)$ и $g^* = (3\epsilon)/(N_f^2 + 4)$.

МФ и МК представляют собой теорию среднего поля и методы Монте-Карло.

Когда существуют несколько безразмерных констант связи $b = (b_1, \dots, b_n)$, нужно рассматривать поток ренормализации на многомерной критической гиперповерхности, определенной как $a = 0$. Этот поток удовлетворяет

$$\frac{d\bar{\mathbf{b}}(s)}{ds} = \beta(\mathbf{b}(s), \epsilon). \quad (10)$$

Предполагая, что мы находим решение фиксированной точки, удовлетворяющее $\beta = 0$, изучим его устойчивость. Линеаризуем β около фиксированной точки:

$$\frac{d\bar{\mathbf{b}}(s)}{ds} \sim \Omega \cdot \bar{\mathbf{b}}(s), \quad \Omega_{ll'} = \left(\frac{\partial \beta_l}{\partial \bar{b}_{l'}} \right) \Big|_{\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}}^*}. \quad (11)$$

Здесь Ω — это $n \times n$ матрица устойчивости, которая может быть несимметричной. Рассмотрим специальный случай с n независимыми собственными векторами \mathbf{B}_l и соответствующими собственными значениями ω_l . Его можно диагонализировать как $\mathbf{P}\Omega\mathbf{P}^{-1} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$, что приводит к

$$\mathbf{B}_l = (\mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{b}}(s))_l = e^{s\omega_l}. \quad (12)$$

Таким образом, в инфракрасном пределе при $s \rightarrow -\infty$ фиксированная точка $\bar{\mathbf{b}}^*$ устойчива (неустойчива) вдоль направления, где $\text{Re}(\omega_l) > 0$ ($\text{Re}(\omega_l) < 0$). Собственные значения ω_l матрицы устойчи-

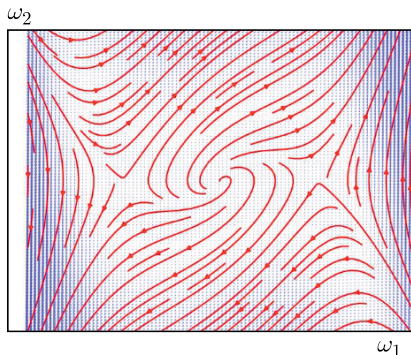


Рис. 1. Поток ренормализационной группы модели симметрии для $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_A(1)$

вости $\Omega_{ll'} = (\partial\beta_l/\partial g_{l'})$ определяют, является ли фиксированная точка инфракрасно устойчивой. Проведя простые алгебраические вычисления, получаем

$$(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} (-\epsilon, -\epsilon) & \text{для } \bar{g}^* = (0, 0), \\ \left(\epsilon, -\frac{N_f^2 - 2}{N_f^2 + 4} \epsilon \right) & \text{для } \bar{g}^* = \left(\frac{3}{N_f^2 + 4} \epsilon, 0 \right). \end{cases} \quad (13)$$

Для случая $N_f = 2$ всегда существует отрицательное собственное значение, что указывает на отсутствие инфракрасно устойчивой фиксированной точки на критической гиперповерхности. Это означает, что фазовый переход является переходом первого порядка, индуцированным флуктуациями, как обсуждалось в матрице устойчивости. Поток ренормализации на двумерной критической поверхности показан на рис. 1. Независимо от начальной точки потока константы связи будут направляться в неограниченные области ($b_2 < 0$ или $b_1 + b_2/N_f < 0$).

2.2. Безмассовая КХД с аксиальной аномалией. Рассмотрим случай, когда $c \neq 0$ и $h = 0$. В этом сценарии L_{eff} обладает киральной симметрией $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$. Поскольку симметрия $U_A(1)$ всегда нарушается аксиальной аномалией независимо от температуры, этот случай ближе к реальным условиям.

В табл. 2 сведены критические порядки для безмассовых кварков при $h = 0$. Количество ароматов (N_f) играет ключевую роль, и мы исследуем физику для различных сценариев N_f .

1) Случай $N_f = 1$. При использовании разложения, данного в уравнении (5), для случая с одним ароматом $S^0 + iP^0 = 0$. Имеем

$$-c/2 \det(\Phi + \Phi^\dagger) = -c\sigma. \quad (14)$$

У этого члена та же форма, что и у члена массы кварка (или внешнего магнитного поля) в уравнении (6), но он существенно нарушает кираль-

Таблица 2. Критические показатели для фазового перехода с киральностью с аксиальной аномалией и без нее (безмассовая КХД, $h = 0$)

N_f	Без аксиальной аномалии ($c = 0, h = 0$)	С аксиальной аномалией ($c \neq 0, h = 0$)
1	Второго порядка $[O(2)]^*$	Нет фазового перехода
2	Первого порядка	Второго порядка $[O(2)]^*$
3	Первого порядка	Первого порядка**
4	Первого порядка	Первого порядка

*Квадратные скобки указывают на симметрию, соответствующую фазовым переходам второго порядка.
 **Этот фазовый переход первого порядка вызван кубическим членом, происходящим от аксиальной аномалии.

ную симметрию. Таким образом, фазовый переход второго порядка при $c = 0$ превращается в непрерывный переход при $c \neq 0$.

2) Случай $N_f = 2$. Используя разложение для двух ароматов,

$$\Phi = \sqrt{2}(\sigma + i\eta + \delta \cdot \tau + i\pi \cdot \tau), \quad (15)$$

где τ представляет матрицы Паули, получаем

$$L_{\text{eff}} = -2/c(\sigma^2 + \pi^2) + c/2(\eta^2 + \delta^2). \quad (16)$$

Объединяя этот член с квадратичным членом в уравнении (6), получаем $((a - c)/2)(\sigma^2 + \pi^2) + ((a + c)/2)(\eta^2 + \delta^2)$. При положительном знаке c согласно спектру частиц при нулевой температуре σ и π становятся практически безмассовыми в критической точке ($a - c \approx 0$), в то время как η и δ по-прежнему обладают массой. В этой точке мы получаем модель ϕ^4 с симметрией $O(4)$:

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{(a - c)}{2}\phi^2 + \frac{(b_1 + b_2/2)}{4!}(\phi^2)^2, \quad (17)$$

где $\phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = (\sigma, \pi)$.

3) Случай $N_f = 3$. Определительный член дает кубический член

$$-c/2 \det(\Phi + \Phi^\dagger) = -c/(3\sqrt{3}) + \sigma^3. \quad (18)$$

Даже на уровне среднего поля переход все еще остается первого порядка.

4) Случай $N_f \geq 4$. Определительный член дает кварковые члены (для $N_f = 4$) и члены более высокого порядка (для $N_f > 4$). Для первого случая эти члены теоретически важны для критического поведения, но они не стабилизируют фиксированные точки в пространстве (b_1, b_2, c) . Для второго случая эти члены не имеют значения для критического поведения, и результаты, полученные для случая $c = 0$ из п. 2.1, применяются. Поэтому ожидается флуктуационный переход первого порядка для всех $N_f > 4$ [15].

$O(4)$ релевантна и может быть выражена как

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(\partial\vec{\phi})^2 + \frac{a(m_s, T)}{2}\vec{\phi}^2 + \frac{b(m_s, T)}{4!}(\vec{\phi}^2)^2 + \frac{c}{6!}(\vec{\phi}^2)^3 - h\phi_0. \quad (20)$$

Здесь $h \propto m_{ud}$. Три точки фаз соответствуют $a = b = 0$ и $c > 0$. Три линии фазового перехода второго порядка пересекаются в своих соответствующих точках фазы и продолжаются в крылья для положительных и отрицательных m_{ud} . Минимизируя свободную энергию по параметру порядка ϕ и учитывая масштабные зависимости a, b, c, h при $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0, c > 0$, получаем ведущую степенную форму крыльев фазовой поверхности:

$$\pm h = \frac{8c}{3} \left(\frac{a}{5c} \right)^{5/4} = \frac{8c}{3} \left(-\frac{3b}{10c} \right)^{5/2} \quad (a \geq 0, b \leq 0). \quad (21)$$

С использованием результата уравнения (17), где $\pm h = c/3(a/5c)^{5/4} = 8c/3((-3b)/10c)^{5/2}$ для $a \geq 0, b \leq 0$, ведущее поведение этого крыла в окрестности трехфазной точки задается $m_{ud} \sim (m_s^{\text{tri}} - m_s)^{5/2}$.

Таблица 3. Вторичные фазовые переходы КХД для различного числа ароматов при $N_f = 3$

Параметр	N_f			
	0	2	2 + 1	3
m_{ud}	∞	0	$\sim 5 \text{ МэВ}$	0
m_s	∞	∞	$\sim 100 \text{ МэВ}$	0
Порядок	Первый	Второй	Первый или переход	Первый
Симметрия	$Z(3)$	$O(4)$	$SU_L(3) \times SU_R(3)$	$SU_L(3) \times SU_R(3)$
T_C (решетка)	$\sim 270 \text{ МэВ}$	$\sim 170 \text{ МэВ}$	—	$\sim 150 \text{ МэВ}$

Положение физической массы кварков в плоскости (m_{ud}, m_s) все еще неопределенно. Она может находиться в области фазового перехода первого порядка (полный круг) или в области непрерывного перехода (полный квадрат) (табл. 3). Вычисление КХД с динамическими массами кварков предоставляет некоторые доказательства того, что реальные ситуации находятся в области непрерывного перехода. Дальнейшее подтверждение этого доказательства требует более малых масс кварков и больших объемов решетки, что является одной из самых важных проблем в решеточной КХД [17].

4. ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОГО ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Фраза «КХД при конечном химическом потенциале» относится к теории, описывающей сильное взаимодействие между кварками и глюонами, при условиях, когда существует ненулевой барионный химический потенциал. В контексте высокоэнергетической ядерной физики это часто

происходит в исследованиях свойств кварк-глюонной плазмы и фазовой диаграммы ядерного вещества. В КХД химический потенциал связан с числом кварков в системе. При конечном химическом потенциале исследуется поведение материи КХД под влиянием изменяющихся барионных плотностей. Это особенно важно для понимания фаз ядерного вещества при высоких температурах и/или плотностях.

Введение кваркового химического потенциала μ обогащает фазовую диаграмму КХД. Мы рассматриваем фазовую диаграмму в трехмерном пространстве (T, μ, m_{ud}) с относительно большой массой странного кварка m_s . Когда m_{ud} мал, функционал Ландау системы имеет форму, аналогичную модели с симметрией $O(4)$ в уравнении (20):

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{a(\mu, T)}{2}\phi^2 + \frac{b(\mu, T)}{4!}(\phi^2)^2 + \frac{c}{6!}(\phi^2)^3 - h\phi_0. \quad (22)$$

Здесь $h \propto m_{ud}$, а c предполагается положительным. Из-за двух параметров μ и T , управляющих a и b , трехкритическая точка может появиться в начале, где $a = b = h = 0$. Фактически положение этой трехкритической точки впервые было вычислено в модели Намбу–Йона-Лазинию [12, 13, 18, 19], и последующие исследования распространились на более общие модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Технологические достижения стимулировали наше понимание критической точки фазового перехода киральной фазы в эффективных теориях КХД. На пересечении теоретических инноваций и вычислительных возможностей были обсуждены потенциальные будущие направления. Особое внимание уделено роли развивающихся технологий в дальнейшем раскрытии загадок сильной динамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown F.R., Butler F.P., Chen H., Christ N.H., Dong Z.-H., Schaffer W., Unger L.I., Vaccarino A. On the Existence of a Phase Transition for QCD with Three Light Quarks // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 2491.
2. Aoki S., Fukaya H., Taniguchi Y. Chiral Symmetry Restoration, Eigenvalue Density of Dirac Operator and Axial $U(1)$ Anomaly at Finite Temperature // Phys. Rev. D. 2012. V. 86. P. 114512; arXiv:1209.2061 [hep-lat].
3. Bazavov A., Ding H. T., Hegde P., Karsch F., Laermann E., Mukherjee S., Petreczky P., Schmidt C. Chiral Phase Structure of Three Flavor QCD at Vanishing Baryon Number Density // Phys. Rev. D. 2017. V. 95. P. 074505; arXiv:1701.03548 [hep-lat].
4. Ding H. T. et al. (HotQCD Collab.). Chiral Phase Transition Temperature in (2+1)-Flavor QCD // Phys. Rev. Lett. 2019. V. 123. P. 062002; arXiv: 1903.04801 [hep-lat].

5. *Aoki Y., Endrodi G., Fodor Z., Katz S.D., Szabo K.K.* The Order of the Quantum Chromodynamics Transition Predicted by the Standard Model of Particle Physics // *Nature*. 2006. V. 443. P. 675–678.
6. *Neuberger H.* Exactly Massless Quarks on the Lattice // *Phys. Lett. B*. 1998. V. 417. P. 141–144.
7. *Borsanyi Sz., Delgado Y., Durr S., Fodor Z., Katz S.D., Krieg S., Lippert T., Nogradi D., Szabo K.K.* QCD Thermodynamics with Dynamical Overlap Fermions // *Phys. Lett. B*. 2012. V. 713. P. 342–346.
8. *Borsanyi Sz., Fodor Z., Katz S.D., Krieg S., Lippert T., Nogradi D., Pittler Y., Szabo K.K., Toth B.C.* QCD Thermodynamics with Continuum Extrapolated Dynamical Overlap Fermions // *Phys. Rev. D*. 2015. V. 92. P. 014505.
9. *Borsanyi Sz. et al.* Calculation of the Axion Mass Based on High-Temperature Lattice Quantum Chromodynamics // *Nature*. 2016. V. 539. P. 69–71.
10. *Fukaya H., Hashimoto S., Ishikawa K.-I., Kaneko T., Matsufuru H., Onogi T., Yamada N.* Lattice Gauge Action Suppressing Near-Zero Modes of $H(W)$ // *Phys. Rev. D*. 2006. V. 74. P. 094505.
11. *Banks T., Casher A.* Chiral Symmetry Breaking in Confining Theories // *Nucl. Phys. B*. 1980. V. 169. P. 103–125.
12. *Pisarski R.D., Wilczek F.* Remarks on the Chiral Phase Transition in Chromodynamics // *Phys. Rev. D*. 1984. V. 29. P. 338–341.
13. *Kobayashi M., Maskawa T.* CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction // *Prog. Theor. Phys.* 1973. V. 49. P. 652.
14. *Botella F.J., Chao L.-L.* Normalization of CP Violation in Multi-Higgs Models // *Phys. Lett. B*. 1986. V. 168. P. 97.
15. *Botje M.* QCDNUM: Fast QCD Evolution and Convolution // *Comput. Phys. Commun.* 2011. V. 182. P. 490–532.
16. *Heller U.* Recent Progress in Finite Temperature Lattice QCD. arXiv:hep-lat/011. 2006.
17. *Laermann E., Philipsen O.* Lattice QCD at Finite Temperature // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2003. V. 53. P. 163–198.
18. *Asakawa M., Yazaki K.* Chiral Restoration at Finite Density and Temperature // *Nucl. Phys. A*. 1989. V. 504. P. 668–684.
19. *Banks T., Cahser A.* Chiral Symmetry Breaking in Confining Theories // *Nucl. Phys. B*. 1980. V. 169. P. 103–125.