ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2025. Т. 56, вып. 4. С. 1679–1686

КОНСТРУКТИВНАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, ОСНОВАННАЯ НА КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В. В. Корняк [1,*]

[1] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

Рассматривается формулировка квантовой механики, основанная на замене общей унитарной группы конечными группами. Для решения проблем, возникающих в контексте данной формулировки, используются методы компьютерной алгебры и вычислительной теории групп.

A formulation of quantum mechanics based on replacing the general unitary group by finite groups is considered. To solve problems arising in the context of this formulation, we use computer algebra and computational group theory methods.

PACS: 03.65.–w; 03.67.–a; 03.65.Fd; 02.70.Wz

ВВЕДЕНИЕ

Конструктивную версию физической теории можно построить, заменив в формализме бесконечные множества конечными. Это не создаст проблем с описанием эмпирической реальности, поскольку конечные множества могут быть сколь угодно большими.

Унитарная группа выполняет в стандартной квантовой механике двойную функцию: 1) одномерные подгруппы описывают квантовые эволюции, 2) группа в целом описывает симметрии квантовых систем. В рассматриваемой версии квантовой механики для описания унитарной эволюции вместо непрерывной одномерной группы используется конечная группа циклических перестановок. Учет условий, обеспечивающих квантовые интерференции, приводит к конечной группе Вейля–Гейзенберга. Часть элементов этой группы — операторы смещения — порождают все возможные в конструктивном контексте квантовые эволюции. Группой симметрий квантовых систем выступает конечная группа Клиффорда, группа автоморфизмов группы Вейля–Гейзенберга.

Отказ от непрерывных групп дает, в частности, естественное объяснение отсутствию наблюдений квантовых интерференций и запутанности между частицами разных типов. Анализ разложений квантовой системы на подсистемы, основанный на структуре конечной циклической группы,

* E-mail: vkornyak@gmail.com

показывает, что существенно квантовое поведение проявляется только в подсистемах, размерности гильбертовых пространств которых являются степенями простых чисел.

Замена непрерывных групп конечными предполагает модификацию понятия квантовых состояний. Изучается возможный подход, основанный на учете симметрий относительно группы Клиффорда и требовании рациональности вероятностей переходов между состояниями.

1. ОПИСАНИЕ КВАНТОВОЙ ЭВОЛЮЦИИ КОНЕЧНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППОЙ

В стандартной квантовой механике унитарная эволюция порождается гамильтонианом: $U_t = \exp\left(-i(H/\hbar)t\right) = \left(\exp\left(-i(H/\hbar)\right)\right)^t = \mathrm{E}^t$. Без потерь для описания физической реальности можно предположить, что время t — целочисленный параметр, а оператор E — элемент представления конечной циклической группы $\mathbb{Z}_N$, где N — большое натуральное число. В работе [1], в предположении, что время t задано в единицах Планка, приведены оценки $N \sim \begin{cases} \exp\left(\exp\left(20\right)\right) & \text{для 1 см}^3 \text{ вещества,} \\ \exp\left(\exp\left(123\right)\right) & \text{для всей Вселенной.} \end{cases}$

1.1. Непрерывная и конечная группы. Одномерной группой Ли является унитарная группа $\mathsf{U}(1)$, реализуемая как единичная окружность в комплексной плоскости. В приложениях эту группу приближают конечной группой $\mathbb{Z}_N$, которая устроена гораздо сложнее $\mathsf{U}(1)$. $\mathbb{Z}_N$ разлагается в произведение циклических групп взаимно простых порядков: $\mathbb{Z}_N \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\ell_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_M^{\ell_M}}$, где $N = p_1^{\ell_1} \ldots p_M^{\ell_M}$ — произведение степеней *различных* простых чисел. Топологически $\mathbb{Z}_N$ представляет собой дискретный многомерный тор, топология которого напоминает одномерную топологию окружности, только если N — простое число. Группу $\mathbb{Z}_N$ можно отождествить с кольцом целых чисел по модулю N, расширив набор операций $\{+\} \to \{+, \times\}$.

1.2. Поля Галуа и квантовая механика. Группу вида $\mathbb{Z}_{p^\ell}$ можно рассматривать как подструктуру поля Галуа $\mathbb{F}_{p^\ell}$. Преимуществом поля $\mathbb{F}_{p^\ell}$ над кольцом $\mathbb{Z}_{p^\ell}$ является мультипликативная обратимость всех ненулевых элементов. Поля Галуа можно описать рекурсивно:

а) Если $\ell = m \cdot n$, то поле Галуа $\mathbb{F}_{p^\ell}$ можно построить как расширение степени n поля Галуа $\mathbb{F}_{p^m}$, т. е. как n-мерное векторное пространство над $\mathbb{F}_{p^m}$, базис которого образуют степени корня произвольно выбранного неприводимого полинома над $\mathbb{F}_{p^m}$. Умножение в $\mathbb{F}_{p^\ell}$ определяется как умножение элементов $\mathbb{F}_{p^\ell}$, интерпретируемых как полиномы, по модулю выбранного полинома, а сложением является обычное сложение векторов. *Следом* относительно расширения $\mathbb{F}_{p^\ell} \supset \mathbb{F}_{p^m}$ называется отображение $\mathbb{F}_{p^\ell} \to \mathbb{F}_{p^m}$, определяемое для $\alpha \in \mathbb{F}_{p^\ell}$ формулой $\mathrm{tr}\,(\alpha) \equiv \mathrm{tr}_{\ell/m}(\alpha) = \alpha + \alpha^{p^m} + \alpha^{p^{m\cdot 2}} + \ldots + \alpha^{p^{m\cdot(n-1)}} \in \mathbb{F}_{p^m}$.

б) Если $m = 1$, то $\mathbb{F}_{p^m}$ является *простым полем* $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$.

Поля Галуа позволяют описывать *многочастичные квантовые системы* неразличимых частиц. Квантовую систему с числом степеней свободы $N = p^\ell$ можно представить как совокупность n идентичных подсистем, каждая из которых имеет p^m степеней свободы.Переменные такой системы принимают значения в поле $\mathbb{F}_{p^\ell}$, а ее гильбертово пространство имеет структуру $\mathcal{H}_{p^\ell} \cong \mathcal{H}_{p^m} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{p^m}$.

1.3. Перестановочное представление $\mathbb{Z}_N$. Перестановочная матрица $X = \sum\limits_{i=0}^{N-1} |i+1\rangle\langle i|$ порождает *регулярное* представление группы $\mathbb{Z}_N$ в N-мерном гильбертовом пространстве. Регулярное представление порождается также матрицами $X_v = X^v = \sum\limits_{i=0}^{N-1} |i+v\rangle\langle i|$, $\gcd(v, N) = 1$. Базис $\mathrm{B}_X = (|0\rangle, \ldots, |N-1\rangle)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_N$, ассоциированный с матрицей X, называется базисом *координат* или *онтическим* (’т Хоофт [2]), или *вычислительным* базисом. В этом базисе квантовый оператор координаты имеет вид $\widehat{x} = \sum\limits_{x=0}^{N-1} x|x\rangle\langle x| = \mathrm{diag}\,(0, \ldots, N-1)$.

Эволюция оператора координаты $\widehat{x}_t = X_v^t \widehat{x}_0 X_v^{-t}$, порождаемая генератором X_v, в компонентах имеет вид $x_t = x_0 + vt \mod N$, т. е. представляет собой «равномерное движение со скоростью v».

В размерности $N = p^\ell$ с каждой степенью свободы $\nu \in \mathbb{F}_{p^\ell}$ связан генератор циклической группы $\mathbb{Z}_N$ вида $X_\nu = \sum\limits_{\gamma \in \mathbb{F}_{p^\ell}} |\gamma + \nu\rangle\langle\gamma|$.

1.4. Разложение на неприводимые компоненты. Регулярное представление конечной группы содержит все неприводимые представления. Для $\mathbb{Z}_N$ эти представления одномерны и порождаются степенями элемента $\omega = \mathrm{e}^{2\pi i/N}$. Разложение X в прямую сумму генераторов неприводимых представлений имеет вид $Z = FXF^{-1} = \mathrm{diag}\,(1, \omega, \ldots, \omega^{N-1})$, где F — матрица Фурье: $(F)_{ij} = (1/\sqrt{N}\,)\,\omega^{ij}$, $i, j = 0, \ldots, N-1$. С матрицей Z ассоциирован *базис импульсов* $\mathrm{B}_Z = (|\widetilde{0}\rangle, |\widetilde{1}\rangle, \ldots, |\widetilde{N-1}\rangle)$, являющийся фурье-образом базиса B_X.

Если $N = p^\ell$, то для $\mu \in \mathbb{F}_{p^\ell}$ имеем $Z_\mu = \sum\limits_{\gamma \in \mathbb{F}_{p^\ell}} \exp\,(((2\pi i)/p)$ $\mathrm{tr}\,(\mu\gamma))|\gamma\rangle\langle\gamma|$.

Циклическая группа не имеет необходимых для *описания квантовых интерференций* проективных представлений. Однако X и его диагональная форма Z в паре порождают проективное представление группы $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ в $\mathcal{H}_N$. Прямое вычисление приводит к коммутационному соотношению $ZX = \omega XZ$, которое Вейль получил, обратив внимание на то, что коммутационное соотношение Гейзенберга для операторов координаты и импульса $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{1}$, а следовательно, и стандартную квантовую теорию в целом, можно реализовать только в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Анализ Вейля квантового поведения в N-мерном пространстве [3] с необходимостью приводит к матрицам X и Z.

Базисы B_X и B_Z являются *взаимно несмещенными*, т. е. борновские вероятности переходов между элементами разных базисов одинаковы для любых пар элементов: $|\langle\widetilde{\ell}|k\rangle|^2 = 1/N$, $\ell, k = 0, \ldots, N-1$. Это означает, что измерение квантового состояния, являющегося вектором одного из базисов, в другом базисе не даст никакой информации: результаты измерений будут разбросаны с равной вероятностью по всем N возможностям. Фактически понятие взаимно несмещенных базисов, впервые четко сформулированное Швингером [4], представляет собой математическую формализацию принципа дополнительности Бора.

Идеи Вейля и Швингера активно развиваются в различных областях: основания квантовой теории, квантовая информатика, теория обработки сигналов и т. д. Игнорируя для краткости специфику «размерностей Галуа», опишем основные элементы формализма для случая кольца $\mathbb{Z}_N$.

Элемент $\tau = -\mathrm{e}^{\pi i/N}$ порождает $\mathbb{K}_N$, если $N = 2k+1$, и $\mathbb{K}_{2N}$, если $N = 2k$, где $\mathbb{K}_n$ обозначает группу корней степени n из единицы. Элементы τ, X и Z порождают *группу Вейля–Гейзенберга* $\mathrm{WH}(N) = \langle\tau, X, Z\rangle$. Порядок $\mathrm{WH}(N)$ равен N^3 или $2N^3$ в зависимости от четности N. Квантовые эволюции порождаются *операторами смещения* $\mathrm{D}_{\mathbf{p}} = \tau^{p_1p_2}X^{p_1}Z^{p_2}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, образующими *проективную группу Вейля–Гейзенберга* $\mathrm{PWH}(N)$ порядка N^2. Композиция операторов смещения $\mathrm{D}_{\mathbf{p}}\mathrm{D}_{\mathbf{q}} = \tau^{\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle}\mathrm{D}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$ содержит симплектическую форму $\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle = p_2q_1 - p_1q_2$. Группа симметрий этой формы, симплектическая группа $\mathrm{Sp}\,(2, \mathbb{Z}_N)$, является группой внешних автоморфизмов группы $\mathrm{WH}(N)$.

Объединяя внутренние и внешние автоморфизмы, мы приходим к полупрямому произведению, называемому *группой Клиффорда* $\mathrm{CL}(N) = \mathrm{Aut}\,(\mathrm{WH}(N)) \cong \mathrm{WH}(N) \rtimes \mathrm{Sp}\,(2, \mathbb{Z}_N)$. Традиционно группу Клиффорда определяют как нормализатор группы Вейля–Гейзенберга в унитарной группе $\mathsf{U}(N)$. Потребность в $\mathsf{U}(N)$, сохранившаяся как рудимент непрерывной теории, не вытекает ни из описания квантовой эволюции конечными циклическими группами, ни из построений Вейля. Мы будем рассматривать группу Клиффорда исключительно как группу симметрий группы Вейля–Гейзенберга, не прибегая к ссылке на непрерывную группу $\mathsf{U}(N)$. Группа Клиффорда порождается матрицами X, F и $S = \mathrm{diag}\,(\tau^{i(i+N)}, i = 0, \ldots, N-1)$: $\mathrm{CL}(N) = \langle X, F, S\rangle$.

Проективная группа Клиффорда — фактор-группа группы $\mathrm{CL}(N)$ по ее центру — порождается теми же элементами, $\mathrm{PCL}(N) = \langle X, F, S\rangle$, но матрицы, отличающиеся только фазовым множителем, эквивалентны.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ N-МЕРНОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ НА ПОДСИСТЕМЫ

Гильбертово пространство *глобальной* системы разлагается в тензорное произведение *локальных* пространств $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{n_M}$, если глобальная размерность разлагается в произведение взаимно простых чисел, например, $N = n_1 \cdots n_M$, где $n_i = p_i^{\ell_i}$ — степени различных простых чисел. Класс эквивалентности данного разложения относительно произвола в выборе координат в гильбертовых пространствах можно символически описать как $G(N)\mathcal{H}_N = G(n_1)\mathcal{H}_{n_1} \otimes \ldots \otimes G(n_M)\mathcal{H}_{n_M}$, где $G(n)$ — группа симметрий n-мерного пространства. Используя свойства операции $\otimes$, описание можно упростить до $G(N)\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{n_M}$. То есть разложения, лежащие на орбите глобальной группы $G(N)$, эквивалентны и полностью определяются разложением размерности.

Предположение $G(N) = \mathsf{U}(N)$ может привести к артефактам, поскольку непрерывная группа $\mathsf{U}(N)$ свободно «перемешивает» состояния между различными компонентами тензорного произведения, что привело бы к не наблюдающейся в природе запутанности между фундаментальными, т. е. не составными, частицами различных типов.

Предположение $G(N) = \mathrm{CL}(N)$ проблем подобного рода не вызывает, поскольку в группе Клиффорда глобальной системы отсутствуют преобразования, перемешивающие состояния между локальными гильбертовыми пространствами взаимно простых размерностей. Математически это выражается тем фактом, доказываемым с помощью китайской теоремы об остатках, что глобальная группа Клиффорда разлагается в прямое произведение локальных: $\mathrm{CL}(N) = \mathrm{CL}(n_1) \times \cdots \times \mathrm{CL}(n_M)$.

Из китайской теоремы также следует соотношение между энергетическими уровнями системы и подсистем $E_{k/N} = E_{k_1/n_1} + \ldots + E_{k_M/n_M}$, где $E_\nu = h\nu$. Это означает, что энергия глобальной системы равна сумме энергий составляющих, а энергии взаимодействий отсутствуют.

Таким образом, подсистемы взаимно простых размерностей можно изучать отдельно и независимо друг от друга, так как между ними нет ни квантовых запутанностей, ни энергетических взаимодействий.

В системах простых размерностей, $N = p$, ввиду отсутствия подсистем невозможна квантовая запутанность. Следовательно, основной интерес для изучения представляют размерности вида $N = p^\ell$, $\ell > 1$.

3. КОНСТРУКТИВНЫЕ КВАНТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ

В непрерывной квантовой механике множеством чистых состояний в N-мерном гильбертовом пространстве является комплексное проективное пространство $\mathbf{P}(\mathcal{H}_N) = \mathbb{C}\mathbf{P}^{N-1}$, представляющее собой однородное пространство унитарной группы $\mathsf{U}(N)$. Это означает, что $\mathbb{C}\mathbf{P}^{N-1}$ является орбитой произвольного единичного вектора: $\mathbb{C}\mathbf{P}^{N-1} \cong \mathrm{Orb}_{\mathsf{U}(N)}(|0\rangle) = \mathsf{U}(N)\,|0\rangle$.

Заменив $\mathsf{U}(N)$ на $\mathrm{CL}(N)$ в качестве группы симметрий, мы предполагаем, что конструктивное множество чистых квантовых состояний $\mathrm{CQS}(N)$ образуют элементы вида $|a\rangle = \sum\limits_{i=0}^{N-1} \varphi_i \alpha_i |i\rangle$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{i=0}^{N-1} \alpha_i^2 = 1$, $\varphi_i \in \mathrm{Z}(\mathrm{CL}(N))$, т. е. фазовые множители принадлежат центру $\mathrm{CL}(N)$.

Множество $\mathrm{CQS}(N)$ должно

1) быть $\mathrm{CL}(N)$-инвариантным;

2) содержать онтические векторы;

3) состоять только из элементов с рациональными борновскими вероятностями переходов между собой.

Формально:

1) $|a\rangle \in \mathrm{CQS}(N) \Longrightarrow \mathrm{Orb}_{\mathrm{CL}(N)}(|a\rangle) \subseteq \mathrm{CQS}(N)$;

2) $|0\rangle \in \mathrm{CQS}(N)$;

3) $|a\rangle\,, |b\rangle \in \mathrm{CQS}(N) \Longrightarrow |\langle a \mid b\rangle|^2 \in \mathbb{Q}$.

Для изучения свойств квантовых состояний, соответствующих этим требованиям, мы реализовали процедуру их последовательного построения. Начальные состояния строятся как орбита вектора $|0\rangle$. Затем повторяется процесс добавления новых состояний, сводящийся к получению квантовых суперпозиций уже имеющихся состояний и отбору тех суперпозиций, вероятности перехода к которым рациональны.

Примеры компьютерных экспериментов в размерностях 2 и 3. Генераторы, центры и размеры групп Клиффорда в этих размерностях приведены в таблице ($\omega = \exp(2\pi i/3)$).

Генераторы, центры и размеры групп Клиффорда

N	X	F	S	Center	Ord
2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$\mathbb{K}_8$	192
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$	$\mathbb{K}_{12}$	2592

***N* = 2.** Результаты вычислений можно продемонстрировать наглядно, поскольку чистые состояния принадлежат комплексной проективной прямой $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$, которую можно представить в виде сферы Римана (Блоха). Проективная группа Клиффорда $\mathrm{PCL}(2) = \mathrm{CL}(2)\,/\mathbb{K}_8$ имеет порядок 24. Возможные размеры орбит являются делителями этого числа. Орбита $\mathrm{Orb}_{\mathrm{CL}(2)}(|0\rangle)$ состоит из шести векторов $|0\rangle$, $|1\rangle$; $\dfrac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$;

$\dfrac{|0\rangle + \mathrm{i}\,|1\rangle}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{|0\rangle - \mathrm{i}\,|1\rangle}{\sqrt{2}}$, ортогональные пары которых образуют полное множество* взаимно несмещенных базисов. На рис. 1, *а* эти шесть векторов образуют вершины октаэдра, а пространственные диагонали октаэдра представляют три взаимно несмещенных базиса. Попарные интерференции этих шести векторов образуют 48 векторов, половина из которых отбраковывается из-за «несоизмеримости» с уже построенными элементами CQS(2), т. е. вероятности переходов оказываются иррациональными. Оставшиеся состояния образуют орбиту группы Клиффорда размера 24. На рис. 1, *б* представлено дополненное этими векторами множество состояний. Следующий шаг приводит к добавлению состояний, образующих 16 орбит размера 24 (рис. 1, *в*).

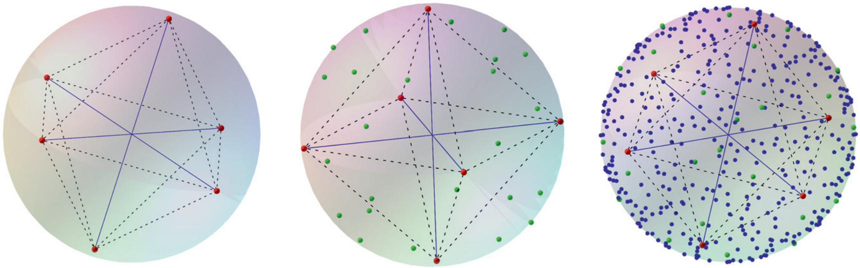
а *б* *в*

Рис. 1. Построение конструктивных квантовых состояний

***N* = *3*.** Порядок проективной группы $\mathrm{PCL}(3) = \mathrm{CL}(3)\,/\mathbb{K}_{12}$ равен 216.

$\mathrm{Orb}_{\mathrm{CL}(3)}(|0\rangle)$ состоит из 12 векторов $|0\rangle\,, |1\rangle\,, |2\rangle$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega\end{pmatrix}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega^2\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\\omega\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega\\1\end{pmatrix}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\\omega^2\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\1\end{pmatrix}$. Последовательные тройки этих векторов образуют полное множество из четырех взаимно несмещенных базисов.

Попарные интерференции векторов этой орбиты порождают 153 вектора, образующие объединение трех орбит группы Клиффорда размеров $9 = 3^2$, $36 = 2^2 3^2$ и $108 = 2^2 3^3$.

* В размерности $N = p^\ell$ всегда существует полное множество $N + 1$ взаимно несмещенных базисов. Измерений относительно векторов из этих базисов достаточно для полного восстановления любого, чистого или смешанного, квантового состояния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Континуально бесконечная унитарная группа из-за своей неконструктивности является потенциальным источником артефактов при использовании в формализме квантовой механики. Мы показали, что квантовое поведение можно описать, используя только конечные группы.

Более конкретно, квантовые эволюции описываются циклическими подгруппами группы Вейля–Гейзенберга, а группой симметрии квантовых систем является группа Клиффорда. Ограничение унитарных симметрий этими группами имеет эмпирически значимые последствия. В частности, отсутствие квантовой запутанности и интерференций между элементарными частицами разных типов находит естественное объяснение.

Разложение квантовой системы на подсистемы определяется разложением размерности ее гильбертова пространства в произведение целых чисел. В простой размерности разложение на подсистемы невозможно. Когда размерность является произведением взаимно простых чисел, квантовое поведение подсистем можно изучать по отдельности, так как между ними нет энергетических взаимодействий и квантовых корреляций. Квантовое поведение проявляется полностью в размерностях, являющихся степенями простых чисел. Это случай многочастичных квантовых систем, состоящих из запутанных неразличимых частиц.

Отказ от непрерывной унитарной группы предполагает модификацию понятия квантового состояния: проективное гильбертово пространство следует заменить некоторой комбинаторной конструкцией. Мы полагаем, что множество состояний должно удовлетворять требованиям: *а*) фазовые множители в состояниях должны быть элементами центра группы Клиффорда, *б*) множество состояний должно быть инвариантным относительно группы Клиффорда и *в*) содержать онтические векторы, *г*) борновские вероятности переходов между элементами множества должны быть рациональными в соответствии с частотной концепцией вероятности. Приведены некоторые результаты компьютерных экспериментов с этим набором требований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Banks T.* Finite Deformations of Quantum Mechanics. arXiv:2001.07662 [hep-th]. 2020. 20 p.
2. *'t Hooft G.* The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics // Fundamental Theories of Physics. V. 185. Springer, 2016. 296 p.
3. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986. 496 с.
4. *Schwinger J.* Unitary Operator Bases // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1960. V. 46, No. 4. P. 570–579.