ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2025. Т. 56, вып. 4. С. 1688–1695

ПОВЕДЕНИЕ НА БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ МНОГОУРОВНЕВЫХ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С НЕВАКУУМНЫМИ РЕЗЕРВУАРАМИ

А. Е. Теретёнков [1,*]

[1] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Рассматривается модель многоуровневой открытой квантовой системы, взаимодействующей с невакуумным резервуаром в приближении вращающейся волны. Получено точное интегральное представление для редуцированной матрицы плотности системы. Для одинаковых некоррелированных резервуаров в диагональных состояниях получена первая пертурбативная поправка для такой динамики в пределе Боголюбова – ван Хова. Показано, что после перенормировки начального состояния она полностью описывается в терминах полугруппы конечной размерности. Предложенный метод может быть также применен к дальнейшим порядкам теории возмущений с перерастяжкой Боголюбова – ван Хова.

The model of multi-level open quantum system interacting with a non-vacuum reservoir in the rotating wave approximation is considered. We provide an exact integral representation for the reduced density matrix of the system. For identical uncorrelated reservoirs in diagonal states we have obtained the first perturbative correction for such dynamics in the Bogolubov – van Hove limit. We have shown that after initial state renormalization it can be completely described in terms of finite-dimensional semigroup. The method we provide can also be applied to the further orders of perturbation theory with Bogolubov – van Hove scaling.

PACS: 03.65.Yz; 05.30.–d

ВВЕДЕНИЕ

Поведение открытых квантовых систем на больших временах является особенно важным. Только если временной масштаб динамики системы отделяется от временного масштаба резервуара, то открытая система становится физической системой с собственным замкнутым описанием динамики. В противном случае это просто некоторые степени свободы, формально взятые из общей системы. Поведение на больших временах тесно связано со стохастическим пределом полной унитарной

* E-mail: taemsu@mail.ru

динамики [1], возможностью марковского вложения динамики матрицы плотности [2], длинновременной марковостью [3–5] матрицы плотности и многовременных корреляционных функций.

В этой работе мы рассматриваем многоуровневую спин-бозон-подобную модель с приближением вращающейся волны (RWA) из [6]. В работе [4] было продемонстрировано длинновременное марковское поведение этой модели, т. е. марковское поведение матрицы плотности и многовременных корреляционных функций на больших временах с дополнительной перенормировкой из-за исходного немарковского поведения. Хорошо известно [1], что это имеет место для модели в пределе Боголюбова – ван Хова даже без перенормировки. Но в данной работе мы фокусируемся на первой нетривиальной пертурбативной поправке к этому пределу для невакуумного и, более того, нефакторизуемого начального состояния системы и резервуара.

Мы оставляем вывод RWA за рамками нашей работы. Но заметим, что RWA также справедливо в режиме слабой связи и больших времен [7–10]. Таким образом, наш подход не нарушает область его применимости.

МНОГОУРОВНЕВАЯ СПИН-БОЗОН-ПОДОБНАЯ МОДЕЛЬ С RWA

Напомним модель из [6]. Мы рассматриваем гильбертово пространство $\mathcal{H} \equiv (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^N) \otimes \bigotimes_{j=1}^N \mathfrak{F}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$. Пусть $|j\rangle, j = 0, 1, \ldots, N$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^N$, $|0\rangle$ интерпретируется как основное состояние. $\mathfrak{F}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$ — бозонные пространства Фока, описывающие резервуары. Пусть $|\Omega\rangle$ — вакуумный вектор для резервуаров. Введем также операторы рождения и уничтожения, которые удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям: $[b_{k,i}, b_{k',j}^\dagger] = \delta_{ij}\delta(k-k')$, $[b_{k,i}, b_{k',j}] = 0$, $b_{k,i}|\Omega\rangle = 0$.

Мы рассматриваем гамильтониан системы вида $\hat{H}_S = 0 \oplus H_S$, где H_S — эрмитова матрица $N \times N$. Гамильтониан резервуара представляет собой сумму одинаковых гамильтонианов свободных бозонных полей (с одинаковым дисперсионным соотношением ω_k и формфакторами g_k), а гамильтониан взаимодействия имеет RWA-вид

$$\hat{H}_B = \sum_{j=1}^N \int \omega(k)\, b_{k,j}^\dagger\, b_{k,j}\, dk,$$

$$\hat{H}_I = \sum_{j=1}^N \int \left(g_k^* |0\rangle\langle j| \otimes b_{k,j}^\dagger + g_k |j\rangle\langle 0| \otimes b_{k,j} \right) dk.$$

Общая динамика системы и резервуаров является унитарной

$$\rho(t) = \mathrm{e}^{-i\hat{H}t}\,\rho(0)\,\mathrm{e}^{i\hat{H}t}$$

с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{H}_S \otimes I + I \otimes \hat{H}_B + \hat{H}_I$. В отличие от [4, 6], мы рассматриваем начальное условие вида

$$\rho(0) = \left(p\sigma \otimes |\Omega\rangle\langle\Omega| + (1-p)|0\rangle\langle 0| \otimes \int dk\, dk'\, \varrho_{ij}(k,k')\, b^\dagger_{k,i}|\Omega\rangle\langle\Omega|\, b_{k',j}\right), \quad (1)$$

где σ — матрица плотности и

$$p \in [0,1], \quad \int dk \int dk'\, \varrho_{ij}(k,k') = 1,$$
$$\int dk \int dk'\, \varrho_{ij}(k,k')\, c_i^*(k)\, c_j(k') \geqslant 0.$$

Отметим, что матрица плотности (1) является нефакторизованной при $p \in (0,1)$, но она по-прежнему является сепарабельной (несцепленной) при любом $p \in [0,1]$.

Нас будет интересовать редуцированная динамика многоуровневой системы в представлении взаимодействия

$$\rho_{SI}(t) \equiv \mathrm{Tr}_B\left(\mathrm{e}^{i(\hat{H}_S\otimes I + I\otimes\hat{H}_B)t}\rho(t)\,\mathrm{e}^{-i(\hat{H}_S\otimes I + I\otimes\hat{H}_B)t}\right).$$

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Поскольку RWA-гамильтониан сохраняет общее число возбуждений, то уравнение Шредингера в картине взаимодействия имеет решение вида

$$|\Psi(t)\rangle = (\psi_0(0) \oplus |\psi(t)\rangle) \otimes |\Omega\rangle + \\ + |0\rangle \otimes \int dk\, \psi_{k,j}(t)\, b^\dagger_{k,j}|\Omega\rangle, \quad |\psi(t)\rangle \in \mathbb{C}^N. \quad (2)$$

Путем прямого многоуровневого обобщения леммы 1 в [11] и перехода в представление взаимодействия мы получаем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть интегралы*

$$G(t) = \int dk\, |g_k|^2\, \mathrm{e}^{-i\omega(k)t},$$

$$f_j(t) = \int dk\, g_k\, \mathrm{e}^{-i\omega(k)t}\, \psi_{k,j}(0)$$

сходятся для всех $t \in \mathbb{R}_+$ *и определяют непрерывные функции* $G(t)$ *и* $f_j(t)$. *Соберем* $f_j(t)$ *в один вектор* $|f(t)\rangle \in \mathbb{C}^N$, $\langle j|f(t)\rangle = f_j(t)$, *тогда* $|\psi(t)\rangle$ *является решением уравнения*

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -i\,\mathrm{e}^{iH_S t}|f(t)\rangle - \int_0^t ds\; G(t-s)\,\mathrm{e}^{iH_S(t-s)}|\psi(s)\rangle. \tag{3}$$

Используя теорему 2.3.1 из [12], получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $G(t)$ *— функция экспоненциального типа, а* $V(t)$ *— решение задачи типа Коши для интегродифференциального уравнения*

$$\frac{d}{dt}V(t) = -\int_0^t ds\, G(t-s)\,\mathrm{e}^{iH_S(t-s)}V(s), \quad V(0) = I;$$

тогда решение уравнения (3) *имеет вид*

$$|\psi(t)\rangle = V(t)|\psi(0)\rangle - i\int_0^t ds\, V(t-s)\,\mathrm{e}^{iH_S s}|f(s)\rangle.$$

Редуцированная матрица плотности, соответствующая чистому состоянию, определяемому уравнением (2), имеет блочный вид

$$\rho_{SI}(t) = \begin{pmatrix} |\psi_0(0)|^2 + \|\psi(0)\|^2 - \|\psi(t)\|^2 & \psi_0(0)\langle\psi(t)| \\ \psi_0^*(0)|\psi(t)\rangle & |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \end{pmatrix}.$$

Разложив произвольное начальное состояние (1) в сумму проекторов на чистые состояния (2), мы получим следующую теорему.

Теорема 1. *Предполагая, что условия лемм 1 и 2 выполнены, определим*

$$K(s,s') \equiv \int dk\, dk'\, \varrho_{jj'}(k,k')\,\mathrm{e}^{-i(\omega(k)s - \omega(k')s')}\, g_k\, g_{k'}^*|j\rangle\langle j'|,$$

тогда

$$\rho_{SI}(t) = \begin{pmatrix} (\rho_{SI}(0))_{00} + \mathrm{Tr}((\rho_{SI}(0))_{ee} - (\rho_{SI}(t))_{ee}) & (\rho_{SI}(t))_{0e}V^\dagger(t) \\ V(t)(\rho_{SI}(t))_{e0} & (\rho_{SI}(t))_{ee} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$(\rho_{SI}(t))_{ee} = pV(t)\,\sigma_{ee}V^\dagger(t) - \\ - (1-p)\int_0^t ds\int_0^t ds'\, V(t-s)\,\mathrm{e}^{iH_S s}K(s,s')\,\mathrm{e}^{-iH_S s'}V^\dagger(t-s'). \tag{5}$$

ПОВЕДЕНИЕ НА БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ ДЛЯ ИДЕНТИЧНЫХ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ РЕЗЕРВУАРОВ В ДИАГОНАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЯХ

Теперь предположим, что $\varrho_{jj'}(k,k')$ имеет специальный вид

$$\varrho_{jj'}(k,k') = \varrho(k)\,\delta_{jj'}\,\delta(k-k'),$$

т. е. резервуары некоррелированы и имеют одинаковые начальные состояния, которые являются диагональными в импульсном базисе. Определим невакуумную спектральную плотность

$$J_\varrho(\omega) \equiv \int dk\,\delta(\omega(k)-\omega)\,\varrho(k)|g_k|^2,$$

тогда $K(s,s')$ становится пропорциональной единичной матрице I:

$$K(s,s') = \int d\omega\, J_\varrho(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega(s-s')} I. \tag{6}$$

Теперь рассмотрим теорию возмущений с перерастяжкой Боголюбова – ван Хова $g_k \to \lambda g_k$ (слабая связь) и $t \to \lambda^{-2} t$ (большие времена) с $\lambda \to +0$. Отметим, что $g_k \to \lambda g_k$ приводит к перерастяжке $G(t) \to \lambda^2 G(t)$ и $K(s,s') \to \lambda^2 K(s,s')$. Если подчеркнуть явную зависимость от λ из-за λg_k в уравнении (4) как $\rho_{SI}(t;\lambda)$, то нас интересует пертурбативное разложение $\rho_{SI}(\lambda^{-2}t;\lambda)$, первые члены которого даются следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть условия теоремы 1 выполнены, и пусть* $K(s,s')$ *определено* (6) *с* $J_\varrho(\omega)$ *из пространства Шварца* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. *Пусть* $\tilde{G}(p)$ *— преобразование Лапласа* $G(t)$, *а также предположим, что* $\tilde{G}(-iH_S) > 0$. *Тогда для фиксированного* t *и* $\lambda \to +0$ *имеем*

$$\rho_{SI}(\lambda^{-2}t;\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{Tr}\,((\rho_{SI}(\lambda^{-2}t;\lambda))_{ee}) & (\rho_{SI}(t))_{0e} r^\dagger(\lambda)\,\mathrm{e}^{L^\dagger(\lambda)t} \\ \mathrm{e}^{L(\lambda)t}\, r(\lambda)(\rho_{SI}(t))_{e0} & (\rho_{SI}(\lambda^{-2}t;\lambda))_{ee} \end{pmatrix} + o(\lambda^2), \tag{7}$$

где $L(\lambda) = -\tilde{G}(-iH_S) + \lambda^2 \tilde{G}'(-iH_S)\tilde{G}(-iH_S)$, $r = 1 - \lambda^2 \tilde{G}'(-iH_S)$,

$$(\rho_{SI}(\lambda^{-2}t;\lambda))_{ee} = \mathrm{e}^{L(\lambda)t}(r(\lambda)(\rho_{SI}(0))_{ee} r^\dagger(\lambda) - \\ - (\rho_{SI}(+\infty))_{ee})\,\mathrm{e}^{L^\dagger(\lambda)t} + (\rho_{SI}(+\infty))_{ee},$$

$$(\rho_{SI}(+\infty))_{ee} = \frac{2\pi}{L(\lambda)+L^\dagger(\lambda)}\; r(\lambda) \times \\ \times \left(J_\varrho(H_S) + i\lambda^2 J'_\varrho(H_S) \frac{L^\dagger(\lambda) - L(\lambda)}{2} \right) r^\dagger(\lambda).$$

Доказательство. Используя теорему 2 из [4], имеем $V(\lambda^{-2}(t-s);\lambda) = \mathrm{e}^{L(\lambda)t}\, r(\lambda) + o(\lambda^2)$.

Из (6) и [13, Theorem 3.1] имеем

$$\mathrm{e}^{iH_S\lambda^{-2}s}\frac{1}{\lambda^2}K(\lambda^{-2}s,\lambda^{-2}s')\,\mathrm{e}^{-iH_S\lambda^{-2}s'} = \\ = 2\pi(J_\varrho(H_S)\delta(s-s') - i\lambda^2 J'_\varrho(H_S)\delta'(s-s')) + o(\lambda^2),$$

тогда интеграл в (5) после перерастяжки Боголюбова – ван Хова принимает вид

$$\lambda^2 \int\limits_0^{\lambda^{-2}t} ds \int\limits_0^{\lambda^{-2}t} ds' V(\lambda^{-2}t-s;\lambda)\,\exp(iH_S sK)(s,s') \times \\ \times \exp(-iH_S s')\, V^\dagger(\lambda^{-2}t-s';\lambda) = \int\limits_0^t ds \int\limits_0^t ds' V\left(\frac{t-s}{\lambda^2};\lambda\right) \times \\ \times \exp\left(i\frac{s}{\lambda^2}H_S\right)\frac{1}{\lambda^2}K(\lambda^{-2}s,\lambda^{-2}s')\,\exp\left(-i\frac{s'}{\lambda^2}H_S\right)V^\dagger\left(\frac{t-s'}{\lambda^2};\lambda\right) = \\ = 2\pi\,\frac{\exp((L(\lambda)+L^\dagger(\lambda))t)-1}{L(\lambda)+L^\dagger(\lambda)}\, r(\lambda)\Bigg(J_\varrho(H_S) + \\ + \; i\lambda^2 J'_\varrho(H_S)\frac{L^\dagger(\lambda)-L(\lambda)}{2}\Bigg) r^\dagger(\lambda) + o(\lambda^2).$$

Подставляя его в уравнения (4), (5), получаем уравнение (7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели поведение модели на больших временах в простейшем нетривиальном случае одинаковых некоррелированных резервуаров в диагональных состояниях. Но заметим, что теорема 1 является более общей и позволяет рассматривать также коррелированные резервуары в различных состояниях. Более того, следуя [14], можно обобщить наши результаты на модель с различными дисперсионными соотношениями и формфакторами, но с использованием матричнозначной функции $G(t)$. Поведение таких моделей на больших временах является интересным направлением для дальнейшего изучения, так как может описывать токи и потоки через систему между различными резервуарами.

В теореме 2 мы рассмотрели только первую нетривиальную поправку к пределу Боголюбова – ван Хова. Однако (по аналогии с [3]) при дополнительных, но все же очень общих, условиях можно получить аналогичное полугрупповое приближение $V(\lambda^{-2}(t-s);\lambda)$ во всех порядках теории возмущений. Мультипольное разложение интегрального ядра также можно провести в любом порядке, следуя [13]. Таким образом, теорема 2 может быть обобщена на все порядки теории возмущений.

Поскольку теорема 2 обобщает результаты [3, 4] на нефакторизованные начальные состояния, описывающие пертурбативную динамику редуцированной матрицы плотности в терминах полугруппы с перенормировкой начальных условий, то ее можно рассматривать как длинновременное марковское поведение. Однако остается открытым вопрос: существуют ли в нашем случае перенормированные аналоги регрессионной формулы для многовременных корреляционных функций? Результаты [3, 4, 14] для вакуумных резервуаров свидетельствуют в пользу того, что должны быть, если динамика редуцированной матрицы плотности описывается полугруппой.

Другим направлением дальнейших исследований является рассмотрение режимов, в которых долговременная динамика не описывается полугруппами [2, 3, 15].

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за важные замечания.

Финансирование. Исследование выполнено за счет Российского научного фонда (грант № 24-11-00039), https://rscf.ru/en/project/24-11-00039/.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Accardi L., Lu Y. G., Volovich I.* Quantum Theory and Its Stochastic Limit. Springer Science & Business Media, 2002.
2. *Trushechkin A.* Long-Term Behaviour in an Exactly Solvable Model of Pure Decoherence and the Problem of Markovian Embedding // Mathematics. 2023. V. 12, No. 1. P. 1.
3. *Teretenkov A. E.* Non-Perturbative Effects in Corrections to Quantum Master Equations Arising in Bogolubov – van Hove Limit // J. Phys. A: Math. Theor. 2021. V. 54, No. 26. P. 265302.
4. *Teretenkov A. E.* Long-Time Markovianity of Multi-Level Systems in the Rotating Wave Approximation // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. P. 2455–2465.
5. *Teretenkov A. E.* Quantum Markovian Dynamics after the Bath Correlation Time // Comput. Math. Math. 2021. V. 63, No. 1. P. 135–145.
6. *Teretenkov A. E.* Non-Markovian Evolution of Multi-Level System Interacting with Several Reservoirs. Exact and Approximate // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. P. 1587–1605.
7. *Fleming C., Cummings N. I., Anastopoulos C., Hu B. L.* The Rotating-Wave Approximation: Consistency and Applicability from an Open Quantum System Analysis // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. V. 43, No. 40. P. 405304.
8. *Tang N., Xu T. T., Zeng H. S.* Comparison between Non-Markovian Dynamics with and without Rotating Wave Approximation // Chin. Phys. B. 2013. V. 22, No. 3. P. 030304.

9. *Trubilko A. I., Basharov A. M.* Theory of Relaxation and Pumping of Quantum Oscillator Non-Resonantly Coupled with the Other Oscillator // Physica Scripta. 2020. V. 95, No. 4. P. 045106.
10. *Burgarth D., Facchi P., Gramegna G., Yuasa K.* One Bound to Rule Them All: From Adiabatic to Zeno // Quantum. V. 6. P. 737.
11. *Teretenkov A. E.* Integral Representation of Finite Temperature Non-Markovian Evolution of Some Systems in Rotating Wave Approximation // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. P. 2397–2404.
12. *Burton T. A.* Volterra Integral and Differential Equations. Elsevier, 2005.
13. *Pechen A. N., Volovich I. V.* Quantum Multipole Noise and Generalized Quantum Stochastic Equations // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2002. V. 5, No. 04. P. 441–464.
14. *Lonigro D., Chruściński D.* Quantum Regression beyond the Born–Markov Approximation for Generalized Spin-Boson Models // Phys. Rev. A. 2021. V. 105, No. 5. P. 052435.
15. *Basharov A. M., Trubilko A. I.* Cooperative Emission of Radiation as a Subordinated Random Process // J. Exp. Theor. Phys. 2021. V. 133. P. 143–153.