ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2025. Т. 56, вып. 5. С. 1819–1873

МИР МИНКОВСКОГО

Б. П. Косяков [1]

[1] Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, 607188, Россия

Статья написана по случаю 160-летия со дня рождения Германа Минковского и посвящена анализу его творческого наследия с позиций современной физики. Значительное внимание уделено вопросу уместности и оптимальным методам преподавания четырехмерной картины пространства событий в школе и вузах. Исследователей, возможно, привлечет та часть статьи, в которой обсуждаются нерешенные концептуальные и математические проблемы, возникшие в связи с великим геометрическим прозрением Минковского.

This paper is written on the occasion of the 160th anniversary of the birth of Hermann Minkowski, and is devoted to the analysis of his creative heritage from the perspective of modern physics. Considerable attention is paid to the issue of relevance and optimal methods for teaching the four-dimensional picture of event space in secondary schools and universities.

PACS: 01.70.+w; 03.30.+p; 03.50.De; 03.65.Ta; 04.20.Cv; 04.70.Bw; 11.30.Cp

1. ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

В 2024 г. отмечалось 160-летие со дня рождения Германа Минковского, который известен среди физиков главным образом как автор геометрической формулировки теории относительности с помощью четырехмерного континуума — универсального образа пространства и времени. Этот континуум мы называем пространством Минковского и обозначаем символом $\mathbb{R}_{1,3}$. Сам Минковский использовал для $\mathbb{R}_{1,3}$ название *мир*, и это слово укоренилось в ряде производных понятий, например, *мировая линия*, *мировая поверхность*, *мировой объем*.

21 сентября 1908 г. в своем докладе на съезде немецких естествоиспытателей и врачей Минковский провозгласил: «Отныне пространство само по себе и время само по себе должны превратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность» [1]. Он ожидал, что физики проникнутся четырехмерным образом мышления и это приведет к революционному изменению в понимании физической реальности. Однако физики с этим не спешили. Достаточно напомнить, что Альберт Эйнштейн обходился без $\mathbb{R}_{1,3}$

до 1912 г., рассматривая эту геометрическую конструкцию как проявление «чрезмерной учености» (uberflüssige Gelehrsamkeit) [2], и воспринял всерьез четырехмерную картину только после того, как отождествил гравитацию с искривлением пространства-времени [3].

К сожалению, нужно признать, что и сегодня осознание этого великого открытия можно встретить лишь у профессиональных исследователей; в учебных программах вузов преобладает ви́дение геометрии мира с научных позиций конца XIX в.

Идея синтеза пространства и времени была не такой уж новой для математиков и физиков — современников Минковского. В своих лекциях по теории волчка Феликс Клейн применил четырехмерное описание, в котором время играет роль четвертого измерения, как удобный математический прием [4]. Такого рода синтез обсуждался и в философском контексте. В 1764 г. Жан Лерон Д'Аламбер в статье «Размерность» для «Энциклопедии наук, искусств и ремесел» отметил возможность рассматривать время как четвертое измерение.

На первый взгляд, понятия пространства и времени никак не связаны, разве что чисто словесно. Но при внимательном рассмотрении связь все же обнаруживается, и связующим звеном оказывается понятие *движения*. Об этом догадывались древние мыслители; ярким свидетельством их прозрений могут служить знаменитые апории Зенона. Для согласования реальной и логической картин бесконечно медленного движения требовалось более глубокое осмысление свойств пространства и времени.

Переломный пункт этой истории приходится на начало XX в. Созрела мысль о *верхнем пределе скорости*, причем максимальную скорость движения приписывали скорости света в вакууме c. Тела могут двигаться со скоростью v, не превышающей c. Ни один сигнал не способен обогнать световой сигнал. И вообще любое локальное импульсно-энергетическое воздействие передается в пространстве не быстрее, чем со скоростью c. Таким образом, единство пространства и времени обнаруживалось не только в бесконечно медленном движении, связанном с апориями Зенона, но и в необходимости затратить конечное время для перемещения в пространстве. В своей лекции 24 сентября 1904 г. на Конгрессе искусств и наук в американском городе Сент-Луис Анри Пуанкаре* дал предсказание эры «совершенно новой динамики, которая помимо прочего будет характеризоваться тем правилом, что никакая скорость не может превысить скорость света» [5].

Могла ли идея максимальной скорости возникнуть раньше? Конечно, могла. Для ее появления не нужно было бы даже изобретать методы измерения скоростей. Да и сама постановка вопроса об экспериментальном сравнении скоростей различных объектов была бы излишней.

* В 2024 г. отмечалось и 170-летие со дня рождения Пуанкаре. Но оду по случаю этого события, вероятно, напишет кто-то более готовый к этой почетной миссии.

Достаточно непосредственного наблюдения, подобного запечатленному в античной аллегории: Ахиллес догонит черепаху, копье догонит Ахиллеса и т. д., а молния догонит любого из них. Но молния не догонит молнию, выпущенную ранее. На математическом языке речь идет о линейно упорядоченном множестве: $t < A < d < \ldots < l$, в котором элементы связаны лишь отношением порядка «$<$». Тот факт, что $l < l$, означает наличие верхней грани l этого множества.

Мысль о максимальной скорости c противоречила *принципу относительности*, сформулированному Галилеем. Согласно этому принципу при переходе от одной инерциальной системы отсчета L к другой L' скорость объекта $\mathbf{v}$ нужно сложить векторно с относительной скоростью $\mathbf{V}$ систем отсчета: $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}$. В частности, скорости движения фронта световой волны отличаются в системах отсчета L и L'. Задача, таким образом, состояла в том, чтобы совместить принцип относительности с трактовкой величины c как универсальной константы.

С задачей успешно справились Эйнштейн [6] и Пуанкаре [7], создавшие частную теорию относительности. Следуя Минковскому, суть этой теории можно выразить одной фразой:

> *Пространство и время образуют единый четырехмерный континуум — пространство событий $\mathbb{R}_{1,3}$, описываемое псевдоевклидовой геометрией.*

Эта статья — дань глубочайшего уважения к творцу $\mathbb{R}_{1,3}$, понятия, наложившего неизгладимый отпечаток на современную физику. В статье суммируется материал оригинальных работ автора, опубликованных в физических журналах различного уровня и адресованных разным аудиториям. Поэтому здесь вопросы, которые отдельным читателям покажутся «школярскими», соседствуют с вопросами, которые у других читателей могут вызвать затруднения. И все же автор питает смиренную надежду на то, что чтение этой довольно длинной статьи принесет пользу тем, у кого хватит терпения добраться до конца.

2. ПРЕИМУЩЕСТВА $\mathbb{R}_{1,3}$

Фридрих Вильгельм Лейбниц считал наш мир «совершеннейшим из всех возможных миров» (Le meilleur des mondes possibles) [8]. В наши дни эта чисто умозрительная догадка о промысле божьем превратилась бы в несокрушимую интеллектуальную убежденность, что $\mathbb{R}_{1,3}$ — совершеннейшая математическая *модель* возможных миров. (Кстати, термин «модель» ввел сам Лейбниц.) Но отложим пока вопрос о высокой гармонии и обратимся к обсуждению педагогической ценности $\mathbb{R}_{1,3}$ на конкретных примерах из университетского курса теоретической физики [9–11].

2.1. Краткость — сестра таланта. Студент-физик испытывает чувство воодушевления, когда впервые видит, насколько просто выглядят уравнения Максвелла в четырехмерной тензорной форме*,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu, \tag{1}$$

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0, \tag{2}$$

по сравнению с их традиционной трехмерной векторной записью,

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\varrho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{4}$$

и бывает очарован их записью с помощью дифференциальных форм Эли Картана:

$$d\,{}^\star F = 4\pi J, \tag{5}$$

$$dF = 0, \tag{6}$$

где использованы 2-формы $F = (1/2)\,F_{\mu\nu}\,dx^\mu \wedge dx^\nu$ и ${}^\star F = (1/2)\,{}^*F_{\mu\nu} \times \times\ dx^\mu \wedge dx^\nu$ и 3-форма $J = (1/6)\,J_{\lambda\mu\nu}\,dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu$, связанная с j^μ соотношением $J_{\lambda\mu\nu} = \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\,j^\rho$.

Чтобы умерить восторги, обычно приводят такой довод. Динамический закон, управляющий электромагнитным полем, зашифрован в уравнениях (1), (2) более плотно, чем в уравнениях (3), (4). Все так. Но какие из этих уравнений более удобны для расшифровки, т. е. отыскания решений в конкретных физических ситуациях?

Как ни странно, стратегию отыскания решений проще наметить применительно к системе уравнений (5), (6), чем к системе (3), (4). Формально речь идет о как будто *переопределенной* системе дифференциальных уравнений в частных производных: 8 уравнений служат для нахождения 6 неизвестных функций (6 координат векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ или, эквивалентно, 6 компонент антисимметричного тензора $F^{\mu\nu}$). Важнейший шаг заключается в превращении ее в *определенную* систему уравнений. Тождество $dd \equiv 0$ для дифференциальной 1-формы d содержит намек на то, что 2-форма

$$F = dA, \tag{7}$$

где $A = A_\mu dx^\mu$ — произвольная гладкая 1-форма, дает общее решение уравнения (6). 4-вектор $A_\mu = A_\mu(x)$ называется *вектор-потенциалом*

---

* Всюду, если не оговорено иное, используется гауссовская система единиц. Принята метрика вида $\eta_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Скорость света c и постоянная Планка $\hbar$ положены равными 1. Тензор ${}^*F^{\lambda\mu}$, дуальный тензору электромагнитного поля, определен равенством ${}^*F^{\lambda\mu} = (1/2)\,\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}$. Действует правило Эйнштейна суммирования членов с повторяющимися индексами. Большинство обозначений стандартны.

электромагнитного поля. В координатных обозначениях уравнение (7) принимает вид

$$F_{\rho\sigma} = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho. \tag{8}$$

Эта конструкция превращает (2) в тождество, ибо свертка симметричного тензора $\partial_\mu \partial_\rho$ с антисимметричным тензором $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ тождественно равна нулю: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho \equiv 0$. В связи с этим уравнение (2) часто именуют *тождеством Бьянки.*

Соответствующая подстановка, превращающая уравнения (4) в тождества, не так очевидна. Правда, если написать компоненты A^μ в фиксированной инерциальной системе отсчета: $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, то с учетом определений $E_i = F_{0i}$ и $B_i = (-1/2)\,\epsilon_{ijk}F^{jk}$ мы можем выразить конструкцию (8) в трехмерном векторном виде:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\phi, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в уравнения (4), можно проверить, что эти уравнения тождественно удовлетворяются при любых гладких ϕ и $\mathbf{A}$. Но чтобы непосредственно изобрести (9) как общее решение уравнений (4), требуется немалая математическая изощренность.

Соотношение (8) не определяет A_μ однозначно. В самом деле, замена A_μ на новую векторную функцию A'_μ,

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi, \tag{10}$$

где $\chi(x)$ — произвольная гладкая функция, оставляет наблюдаемую величину $F_{\lambda\mu}$ неизменной. Замена A_μ на A'_μ вида (10) называется *калибровочным преобразованием*. Таким образом, соотношение (8) вводит в рассмотрение не определенную функцию, а целый класс эквивалентности функций, связанных калибровочным преобразованием (10). Члены $\partial_\mu\chi$ в соотношении (10) называют *калибровочными модами.*

Подставляя (8) в (1), находим

$$\Box A^\mu - \partial^\mu\partial^\nu A_\nu = 4\pi j^\mu, \tag{11}$$

где $\Box \equiv \partial^\lambda\partial_\lambda = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$ есть волновой оператор. Мы пришли, таким образом, к *определенной* системе уравнений (8) и (11), в которой число уравнений равно числу неизвестных функций. Такое изменение характера описания возникло в результате пополнения динамических степеней свободы калибровочными модами $\partial_\mu\chi$, которые являются *вспомогательными* степенями свободы. Эти переменные не влияют на динамику частиц, ибо не дают вклада в силу Лоренца $eF^{\mu\nu}v_\nu$. Более того, ток j^ν не является источником калибровочных мод. Эволюция χ не связана с эволюцией $F^{\mu\nu}$. Калибровочные моды ведут автономный образ жизни. При анализе конфигураций электромагнитного поля мы вправе обращаться с калибровочными модами как нам заблагорассудится, например, из всех элементов данного класса эквивалентности A_μ можно выбрать единственного представителя.

Перепишем уравнение (11) в виде

$$\Pi^{\mu\nu} A_\nu \equiv (\Box\, \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)\, A_\nu = 4\pi j^\mu. \tag{12}$$

Если бы существовал оператор Π^{-1}, обратный Π, то решение уравнения (12) имело бы вид $A = 4\pi\Pi^{-1} j$. Однако $\det \Pi = 0$, т. е. оператор Π не имеет обратного, так что решить в лоб уравнение (12) не удается.

Как же отыскать решение этого уравнения? Воспользуемся свободой обращения с калибровочными модами. Мы можем наложить на A^μ дополнительное условие, резко сужающее пределы калибровочного произвола, например, условие Лоренца

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \tag{13}$$

Тогда уравнение (11) превращается в неоднородное *волновое уравнение*

$$\Box A^\mu = 4\pi j^\mu. \tag{14}$$

Регулярные методы решения этого уравнения детально обсуждаются в учебниках математической физики, поэтому не будем на них здесь задерживаться.

Итак, в ходе расшифровки законов электродинамики студент знакомится с идеей *калибровочного поля* на примере A_μ. Это знакомство можно считать первым шагом органичного погружения в геометрическое описание фундаментальных сил природы.

Но в ряде современных учебников теоретической физики электромагнитное поле сразу же определяется как объект, описываемый вектор-потенциалом A_μ*. Такой подход трудно признать оправданным в отношении студента, освоившего курс общей физики в объеме учебников [13] или [14] и жаждущего логического упорядочения этого багажа в рамках строгих основ теоретической физики. Математик определяет A_μ как связность в расслоенном многообразии с абелевой структурной группой $U(1)$, т. е. как величину отнюдь не настолько простую, чтобы ее можно было бы принять в качестве первичного понятия. Возможно, кто-то возразит, что иначе определить электромагнитное поле вообще невозможно. Однако в этом утверждении прозвучала бы нотка легкомысленного отношения к научному наследию Минковского.

2.2. Кинематика и динамика частиц. Первичным объектом в мире Минковского является частица. Ее историю изображает мировая линия. У массивной частицы мировая линия есть гладкая времениподобная

---

* Так, в частности, обстоит дело и в замечательном учебнике Льва Давидовича Ландау и Евгения Михайловича Лифшица [12], где знакомство читателя с электромагнитным полем в § 16 начинается с фразы: «Свойства же поля характеризуются 4-*вектором* A_i, так называемым 4-потенциалом».

кривая в $\mathbb{R}_{1,3}$. Мировым линиям безмассовых частиц можно сопоставить гладкие светоподобные кривые [15]*.

С математической точки зрения, мировая линия — объект гораздо более простой, чем соответствующая ей трехмерная траектория. Представим себе траекторию мухи, влетевшей в комнату через форточку, совершившей многократный облет комнаты по запутанному пути и покинувшей комнату через ту же форточку. Если потянуть два конца этой траектории в разные стороны, то получится прямая линия с k узлами на ней, причем k может оказаться произвольным. С другой стороны, при подобном растяжении соответствующей мировой линии мы увидим прямую линию совсем без узлов. Таким образом, топологические свойства мировой линии и соответствующей ей траектории существенно различаются. Простое объяснение, почему на мировой линии не образуется самопереплетений, состоит в том, что гладкая времениподобная кривая не меняет ориентации относительно оси времени, т. е. не меняет направления «из прошлого в будущее» на противоположное «из будущего в прошлое», и наоборот**.

Мы не обедним содержания классической теории поля, если предположим, что все мировые линии являются бесконечно дифференцируемыми кривыми. Траектория — не столь простой в дифференциально-геометрическом отношении объект, поскольку из рассмотрения невозможно заранее исключить траектории с изломами. Например, траектория камня, брошенного вертикально вверх, а затем падающего вниз, имеет излом. Эта ломаная линия получается из гладких траекторий камня, брошенного под углом α к горизонту, в пределе $\alpha \to \pi/2$. А между тем соответствующее семейство мировых линий, включая предельный случай, описывается гладкими кривыми.

Уравнение движения релятивистской частицы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\right) = \mathbf{F} \tag{15}$$

выведено впервые Пуанкаре [7] и Максом Планком [17]. Минковский использовал более удобный параметр эволюции — *собственное* время s, связанное с лабораторным временем t соотношением

$$ds = \sqrt{1-\mathbf{v}^2}\, dt, \tag{16}$$

* Очевидно, во времена Минковского говорить о взаимодействующих безмассовых частицах вряд ли кто-нибудь решился бы. Однако сейчас это уже не праздная игра ума, а вполне содержательный предмет обсуждения. В кварк-глюонной плазме происходит восстановление киральной симметрии, и этот факт можно понимать как превращение массивных кварков в безмассовые частицы.

** Правда, здесь имеется и более глубокое, хотя и не столь явное математическое обстоятельство: завязать узлы на линии в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$ размерности $n \geqslant 4$ вообще невозможно [16].

и понятие 4-*скорости* $v^\mu = dz^\mu/ds$, где $x^\mu = z^\mu(s)$ — параметрическое уравнение мировой линии. Использование этих величин удобно тем, что 4-скорость в любой момент удовлетворяет уравнению

$$v^2 = 1. \tag{17}$$

Геометрически это уравнение означает, что историю частицы прочерчивает кривая на верхней поле гиперболоида $v_0^2 - \mathbf{v}^2 = 1$.

Однако гораздо более важное достижение Минковского в этой области состоит в установлении того факта, что уравнение (15) не является чем-то новым по сравнению со вторым законом Ньютона

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}. \tag{18}$$

Иначе говоря, для вывода уравнения (15) не требуется ни отказа от уравнения (18), ни даже его модификации*. Достаточно гладко *вложить* уравнение (18) в $\mathbb{R}_{1,3}$.

Идея вложения исходит из предположения, что уравнение (18) является точным законом в пределе $\mathbf{v} \to 0$. Если фиксировать *мгновенно сопутствующую* систему отсчета, то, пребывая в этой системе, мы будем знать, как происходит эволюция частицы в течение последующего короткого отрезка времени. На геометрическом языке это означает, что векторное равенство (18) выполняется в гиперплоскости Σ, перпендикулярной мировой линии частицы. Но Σ поворачивается вместе с вектором нормали v^μ при движении вдоль мировой линии. Глобальную картину эволюции можно восстановить, сшивая фрагменты, полученные в мгновенно сопутствующих системах отсчета. Алгоритм построения мировой линии таков: в начальный момент $s = s_0$ фиксируется система покоя частицы, находится фрагмент кривой при помощи уравнения (18), затем фиксируется система покоя в близкий момент $s = s_0 + \epsilon$, вычисляется новый фрагмент кривой и т. д. Это напоминает фильм, в котором дискретные кадры изображают ситуацию на соответствующих гиперплоскостях Σ.

Для вложения нам нужен оператор $\overset{v}{\perp}$, который непрерывно проектирует векторы пространства Минковского на гиперплоскости Σ, перпендикулярные мировой линии $x^\mu = z^\mu(s)$. Такой оператор имеет вид

$$\overset{v}{\perp}{}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2}. \tag{19}$$

---

* В этом вопросе учебники нередко вводят студента в заблуждение. Например, в гл. 5 книги [18] утверждается: «Законы ньютоновой механики следует изменить, чтобы достичь соответствия с принципами специальной теории относительности» и «Задача релятивистской механики состоит во введении аналога второго закона Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Этот закон нельзя *вывести* из чего-либо, но он должен обладать некоторыми правильными свойствами...». Эти утверждения ошибочны.

Отметим, что это выражение не изменяется, если мировая линия параметризована с помощью иного параметра эволюции τ, поскольку замена v_μ на $dz_\mu/d\tau$ оставляет $\overset{v}{\perp}$ неизменным.

В системе покоя частицы дифференциал лабораторного времени dt совпадает с дифференциалом собственного времени ds, ибо ось времени t направлена в этот момент вдоль касательной v^μ к мировой линии. Поэтому дифференцирование по t можно в этом случае заменить на дифференцирование по s.

По трехмерному вектору $\mathbf{f}$ в гиперплоскости Σ можно однозначно определить пространственноподобный 4-вектор f^μ. В самом деле, если в системе покоя частицы задать разложение

$$f^\mu = (0, \mathbf{f}), \tag{20}$$

то компоненты f^μ в произвольной системе отсчета получают лоренцевским бустом из компонент (20). Величина f^μ называется *силой Минковского* или просто 4-*силой*.

В сопутствующей системе, где $v^\mu = (1, \mathbf{0})$, с учетом разложения (20) находим

$$v \cdot f = 0. \tag{21}$$

А так как $v \cdot f$ — лоренцевский скаляр, то *сила Минковского ортогональна* 4-*скорости* в любой системе отсчета.

Определим 4-*импульс* частицы p^μ следующим образом. Рассмотрим производную 4-импульса по собственному времени dp^μ/ds. Потребуем, чтобы пространственные компоненты dp^i/ds в системе покоя совпадали с компонентами $d\mathbf{p}/dt$ в уравнении (18). Заметим, однако, что на временнýю компоненту dp^0/ds никаких требований не налагается, она остается произвольной в этой системе отсчета.

Гладкое вложение второго закона Ньютона (18) в $\mathbb{R}_{1,3}$ означает проектирование четырехмерного аналога этого закона на гиперплоскости Σ, ортогональные мировой линии,

$$\overset{v}{\perp}_{\mu\nu}\left(\frac{dp^\nu}{ds} - f^\nu\right) = 0. \tag{22}$$

Это и есть общее уравнение динамики релятивистской частицы. Его можно записать в символическом виде:

$$\overset{v}{\perp}(\dot{p} - f) = 0. \tag{23}$$

Релятивистская динамика частицы наследует второй закон Ньютона в *первозданном* виде (18). Наличие проектора $\overset{v}{\perp}$ в (23) означает, что мы имеем не 4, а 3 независимых уравнения. В самом деле, свертка (22) с v^μ и использование тождества

$$v^\mu\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2}\right) = 0$$

убеждает нас в том, что 4-уравнения (22) связаны линейной зависимостью.

Исаак Ньютон принял в качестве отдельной аксиомы утверждение, что импульс частицы $\mathbf{p}$ есть вектор, пропорциональный скорости частицы $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \tag{24}$$

где коэффициент пропорциональности m служит мерой инерции тела. Объекты, характеризуемые импульсом такого вида, будем называть *галилеевскими частицами* или просто *частицами*. В релятивистском описании галилеевской частицей может считаться точечный объект, обладающий 4-импульсом*

$$p^\mu = mv^\mu. \tag{25}$$

С учетом тождества $v \cdot a = 0$, получаемого дифференцированием тождества (17), можно заключить, что применительно к p^μ вида (25) проектор $\overset{v}{\perp}$ в (22) действует как единичный оператор, а само уравнение (22) сводится к

$$ma^\mu = f^\mu. \tag{26}$$

Чтобы получить уравнение (26) в трехмерном виде (т. е. воспроизвести уравнение Пуанкаре–Планка (15)), напишем его компоненты в некоторой инерциальной системе отсчета и выразим собственное время s через лабораторное время t. Кроме того, определим 3-силу $\mathbf{F}$, действующую на частицу в этой системе отсчета, разлагая силу Минковского f^μ по временно́й и пространственным осям координат с учетом условия ортогональности (21):

$$f^\mu = \gamma\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v},\, \mathbf{F}), \tag{27}$$

где лоренц-фактор $\gamma = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$ введен для удобства. Тогда трехмерная запись уравнения (26) предстанет в виде

$$\frac{d}{dt}\,(m\gamma) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\,(m\gamma\mathbf{v}) = \mathbf{F}. \tag{29}$$

Основным здесь является уравнение (29) (совпадающее, очевидно, с уравнением (15)). Его нередко называют релятивистским обобщением второго закона Ньютона. Это неточное словоупотребление. Как мы уже убедились, в (29) никаких более общих *динамических* свойств по сравнению с уравнением (18) не содержится. А уравнение (28), производное от

* Классическая (не квантовая) теория допускает существование и негалилеевских объектов. Эти объекты обладают 4-импульсами p^μ, зависимость которых от кинематических переменных отлична от той, что представлена в (25). Более подробно об этих объектах читатель может узнать, например, из работ [19] и [9].

уравнения (29), интерпретируется как закон изменения энергии частицы $\varepsilon = m\gamma$ в результате работы, совершаемой силой $\mathbf{F}$ в единицу времени.

2.3. Определение электромагнитного поля. Приступая к изучению электродинамики, студент диву дается в связи с тем, что этот раздел теоретической физики не начинается с определения электромагнитного поля. Как ни странно, определение этого понятия не появляется и на дальнейших стадиях изучения предмета. К примеру, курс электромагнетизма Джона Дэвида Джексона [20], который в университетах США неформально признан эталонным учебником для аспирантов, четко не формулирует определения электромагнитного поля. Чтобы ввести напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитную индукцию $\mathbf{B}$, Джексон* обращается к выражению для силы Лоренца

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{30}$$

и замечает, что эта формула была первоначально открыта экспериментально, а затем подтверждена в многочисленных экспериментальных исследованиях. Такое введение величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ может создать впечатление, что формула имеет феноменологическое обоснование, но никак не мотивирована теоретически. А зачем нужна теоретическая мотивировка? Феноменологическая находка может оказаться лишь приближением к некоторому фундаментальному соотношению. Если однажды мы будем вынуждены подправить формулу (30), то вместе с этим может резко измениться смысл, который мы вкладываем в понятие электромагнитного поля. Однозначно формулируемое и теоретически строго мотивированное определение действительно необходимо, ибо в противном случае мы изучаем свойства физического объекта, пребывая в неведении о его сущности, а значит, рискуем спутать его с объектом иной природы [10].

Определить электромагнитное поле невозможно, не опираясь на теоретическую мощь предложенных Минковским величин v^μ, f^μ и $F_{\mu\nu}$. Ключевое соображение здесь состоит в том, что 4-сила f^μ ортогональна 4-скорости частицы v^μ в точке приложения 4-силы. Поэтому f^μ *не может не зависеть* от v^μ. Простейшие формы зависимости f^μ от v^μ даются линейной и квадратичной функциями. Пусть f^μ зависит от v^μ линейно. Вариант $f^\mu = \alpha v^\mu$ не представляет интереса, так как f^μ ортогональна v^μ лишь при $\alpha = 0$. Поэтому рассмотрим $f^\mu = \beta^{\mu\nu} v_\nu$. Из условия ортогональности (21) получаем уравнение

$$\beta^{\mu\nu} v_\mu v_\nu = 0, \tag{31}$$

которое удовлетворяется при любых v^μ, если

$$\beta^{\mu\nu} = -\beta^{\nu\mu}. \tag{32}$$

* Речь идет о второй редакции книги. На русский язык она переведена лишь в первой редакции.

Таким образом, если физический объект распределен по всему пространству-времени и действует на частицу посредством 4-силы f^μ, линейно зависящей от 4-скорости v^μ, то он описывается в каждой точке антисимметричным тензором $\beta^{\mu\nu}$. Материальные объекты такого типа называются силовыми полями.

Однако $\beta^{\mu\nu}$ содержит сведения не только о состоянии поля, но и о том, насколько крепко поле связано с частицей, т. е. о мере связи частицы с полем. Разъединим эти факторы. В простейшем случае связь частицы с полем характеризуется *скалярным* параметром q. Тогда

$$f^\mu = qF^{\mu\nu}v_\nu. \tag{33}$$

Объект, состояние которого в каждой точке $\mathbb{R}_{1,3}$ описывается антисимметричным тензором $F_{\mu\nu}$, а его действие на частицу дается 4-силой f^μ вида (33), будем называть *электромагнитным* полем, а $F_{\mu\nu}$ — тензором электромагнитного поля.

Будем предполагать, что частица остается тождественной себе на протяжении всей своей истории. Это означает, в частности, что параметр связи частицы с полем q не меняется с течением времени:

$$\dot{q} = 0. \tag{34}$$

Величину q естественно назвать *электрическим зарядом-связью*. Если частице можно приписать конечную (положительную или отрицательную) величину q, то она называется заряженной. Если же электромагнитное поле на частицу вообще не действует, т. е. $q = 0$, то такую частицу считают нейтральной.

Пусть фиксирована инерциальная система отсчета, тогда, следуя Минковскому, определим два трехмерных вектора $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, связав их координаты с компонентами тензора $F_{\mu\nu}$ в виде

$$E_i = F_{0i} = F^{i0}, \quad B_k = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{klm}F^{lm}. \tag{35}$$

Из (33) легко получается выражение для трехмерной силы Лоренца (30).

Итак, электромагнитое поле определяется как поле *простейшего* вида в $\mathbb{R}_{1,3}$*, аналитически воплощенное в формуле для четырехмерной силы Лоренца (33).

Но можно ли условие простоты возводить в ранг фундаментального принципа? Простота — одно из *экстремальных* понятий. А история науки убеждает нас в том, что принцип экстремальности теоретически плодотворен и успешен на практике. Примеров великое множество.

* Здесь необходимо важное уточнение: имеются в виду поля, передающие взаимодействие таким образом, что заряды разных знаков притягиваются, а заряды одинаковых знаков отталкиваются. В следующем подразделе мы обсудим иную картину, когда заряды одного знака притягиваются. В этой картине самым простым оказывается взаимодействие, переносимое скалярным полем.

Достаточно упомянуть второй закон термодинамики (требующий, чтобы энтропия замкнутой системы принимала максимальное значение) и принцип наименьшего действия.

Интересно отметить, что принцип простоты не удается применить вне контекста $\mathbb{R}_{1,3}$. Действительно, 3-сила $\mathbf{F}$ не обязана зависеть от 3-скорости $\mathbf{v}$, так что поле $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ простейшего вида — это однородное поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0$. Однако из требования простоты теперь никак не вытекает выражение (30) для трехмерной силы Лоренца.

Перейдем к более сложному случаю, когда связь частицы с электромагнитным полем характеризуется *псевдоскалярным* параметром $q^\star$. Рассмотрим 4-силу вида

$$f^\mu = q^\star v_\nu {}^*F^{\mu\nu}\,, \tag{36}$$

где ${}^*F^{\lambda\mu} = (1/2)\,\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}$ — тензор, дуальный тензору $F_{\nu\rho}$. Принимая соглашение о связи трехмерного и четырехмерного символов Леви-Чивиты

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{0ijk}, \tag{37}$$

с учетом (35) находим

$$\mathbf{F} = q^\star(\mathbf{B} - \mathbf{v}\times\mathbf{E}). \tag{38}$$

Параметр $q^\star$ ведет себя как псевдоскаляр при пространственных отражениях. Этот параметр называется *магнитным зарядом-связью*, а о частице, испытывающей действие 3-силы $\mathbf{F}$ вида (38), говорят как о *магнитном монополе*.

Отметим, что формула (36) не определяет поля новой природы, в ней фигурирует обычное электромагнитное поле; (36) служит определением магнитного монополя.

На экспериментальный поиск магнитных монополей затрачено много усилий, но свидетельств существования частиц с магнитным зарядом $q^\star$ обнаружить не удалось. Поэтому в настоящее время такие частицы имеют статус гипотетических объектов.

И все же знакомство студента с магнитным монополем на основе формулы (36) — не пустая трата времени. Физика не только изучает свойства наблюдаемых частиц, но и пытается понять, почему ближайшему родственнику заряженной частицы — магнитному монополю — отказан вид на жительство в $\mathbb{R}_{1,3}$.

2.4. Три других фундаментальных взаимодействия. Наиболее общий вид f^μ, зависящей от v^μ линейно, относится к случаю, физически означающему, что частица наделена внутренними степенями свободы, образующими векторное пространство V размерности $\mathcal{N}$. Например, в слабых взаимодействиях V трехмерно и называется изоспиновым пространством, а в сильных взаимодействиях V имеет 8 измерений и называется цветным пространством. Заряд-связь частицы и поля Q_a является вектором пространства V, индекс a пробегает значения от 1 до $\mathcal{N}$. Поле, действующее на частицу, обладает $\mathcal{N}$ зарядовыми степенями свободы, что учитывается наличием у него индекса a. Выражение для 4-силы, линейно зависящей от 4-скорости частицы, представляется [21] в виде

$$f_\mu = \sum_{a=1}^{\mathcal{N}} Q_a \, v^\nu G^a_{\mu\nu}, \tag{39}$$

где $G^a_{\mu\nu}$ описывает пространственно-временны́е и зарядовые состояния поля. Эту величину называют напряженностью *калибровочного* поля или *полем Янга–Миллса* в честь его первооткрывателей Янга Чженьнина и Роберта Миллса [22].

Но векторная связь (39) слишком произвольна, чтобы породить содержательную динамику. Поэтому на V налагается дополнительное ограничение, его наделяют структурой *алгебры Ли*. Попросту говоря, это означает, что элементы пространства V можно не только складывать, но и перемножать между собой. Пусть набор $\mathcal{N}$ элементов $\{T_a\}$ образует базис векторного пространства V. Тогда любой вектор A, принадлежащий V, можно разложить по этому базису: $A = A^a T_a$. Определим следующее правило умножения базисных элементов:

$$[T_a, T_b] = i \sum_a f^c{}_{ab} \, T_c, \tag{40}$$

где $f^c_{ab} = -f^c_{ba}$ — численные коэффициенты, которые называются *структурными константами* рассматриваемой алгебры Ли. Таким образом, произведение $[T_a, T_b]$ есть антикоммутативная билинейная операция. Но эта операция не ассоциативна, т. е. $[T_a, [T_b, T_c]]$ не равно $[[T_a, T_b], T_c]$. Вместо ассоциативности в теории алгебр Ли требуется выполнение тождества Якоби

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_c, [T_a, T_b]] + [T_b, [T_c, T_a]] = 0. \tag{41}$$

Если все структурные константы $f^c{}_{ab} = 0$, то алгебру Ли называют *абелевой*. Примером может служить алгебра, базис которой содержит единственный элемент. Тогда $Q^a T_a$ сводится к скаляру q, а $G^a_{\mu\nu} T_a$ становится тензором электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Если не все структурные константы равны 0, то алгебру Ли называют *неабелевой*. Поле $G_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu} T_a$ принимает значения на такой алгебре Ли и называется *неабелевым* полем. $G_{\mu\nu}$ выражается через *вектор-потенциал* A_μ в виде

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig \, [A_\mu, \, A_\nu], \tag{42}$$

где g — так называемая янг-миллсовская константа связи. В связи с этим принято говорить, что калибровочное взаимодействие переносит *векторное* поле $A_\mu = A^a_\mu T_a$. Слабые и сильные взаимодействия осуществляются неабелевыми полями.

Нам осталось определить гравитационное поле. Как известно, гравитирующие тела притягиваются друг к другу. Гравитационного отталкивания тел в опыте не наблюдалось. Одинаковым телам разумно приписать гравитационный заряд-связь одного знака. Можно показать (см. упр. 7.2 в [23]), что если взаимодействие между частицами переносит векторное поле, то частицы с зарядами одного знака взаимно отталкиваются. Поэтому определение гравитационного поля не может исходить из линейной зависимости между f^μ и v^μ. Нам остается обратиться к квадратичной зависимости 4-силы от 4-скорости. В этом случае потенциальными переносчиками взаимодействия оказываются скалярное поле и симметричное тензорное поле второго ранга. Для таких полей (см. упр. 7.1 и 7.3 в [23]) частицы, имеющие заряды одного знака, притягиваются. Это как раз то, что нужно.

Пусть частица взаимодействует со скалярным полем $\phi(x)$. Из механики Ньютона известно, что скалярное поле $\Phi(\mathbf{x})$ порождает потенциальную силу $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$. Нам нужно отыскать релятивистский аналог такой силы. Из 4-градиента скалярного поля $\partial\phi/\partial x^\mu$ сконструируем 4-вектор f^μ, ортогональный 4-скорости v^μ:

$$f_\mu = m_{\mathrm{g}}(\partial_\mu\phi - v_\mu v^\nu \partial_\nu\phi), \tag{43}$$

где m_{g} — заряд-связь частицы с полем ϕ. Если частица покоится, $v^\mu = (1, \mathbf{0})$, то (43) принимает вид $f^\mu = (0, -m_{\mathrm{g}}\nabla\phi)$. Поэтому аналогом ньютоновской потенциальной силы является 4-сила f^μ, квадратично зависящая от 4-скорости v^μ. Второй член в круглой скобке выражения (43) можно преобразовать к виду

$$-v_\mu v^\nu \partial_\nu\phi = -v_\mu \frac{dz^\nu}{ds}\,\frac{\partial\phi}{\partial z^\nu} = -v_\mu\frac{d\phi}{ds}. \tag{44}$$

Если к выражению (43) добавить член ϕa_μ, не нарушающий условия ортогональности (21), то уравнение движения для частицы, взаимодействующей со скалярным полем, принимает вид

$$\frac{d}{ds}(m + m_{\mathrm{g}}\phi)\, v^\mu = m_{\mathrm{g}}\partial^\mu\phi. \tag{45}$$

Квадратичная зависимость f^μ от v^μ присутствует здесь неявно.

Нас интересует параметр связи m_{g}, удовлетворяющий принципу эквивалентности Эйнштейна, согласно которому m_{g} пропорционален инертной массе частицы,

$$m_{\mathrm{g}} = km, \tag{46}$$

где k — численный коэффициент, зависящий от системы единиц. Переопределим скалярное поле $\phi \to \phi' = 1 + k\phi$, тогда (45) принимает вид

$$\frac{d}{ds}(\phi v^\mu) = \partial^\mu\phi. \tag{47}$$

Этим уравнением описывается поведение частицы в теории гравитации Гуннара Нордстрёма [24], где за гравитационное взаимодействие отвечает скалярное поле ϕ. Эта *простейшая* теория, увы, не позволяет правильно учесть наблюдаемые эффекты гравитации, например, отклонение луча света при его прохождении вблизи Солнца.

Рассмотрим теперь общий вид квадратичной зависимости 4-силы от 4-скорости:
$$f^{\lambda}=-m_{\rm g}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}, \tag{48}$$

где $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ — тензор, симметричный по μ и ν. Условие ортогональности (21) записывается в виде
$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}v^{\lambda}v^{\mu}v^{\nu}=0. \tag{49}$$

Для выполнения равенства (49) при любых v^{μ} необходимо, чтобы тензор $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ менял знак при перестановке как пары индексов (λ,μ), так и пары индексов (λ,ν). Но $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$, симметричный по μ и ν и антисимметричный по λ и μ и по λ и ν, тождественно равен 0. В самом деле, любая циклическая перестановка индексов этого тензора меняет его знак, $\Gamma_{\lambda\mu\nu}=-\Gamma_{\nu\lambda\mu}$. Совершив три циклические перестановки индексов, мы придем к исходному расположению индексов; с другой стороны, эта операция трижды меняет знак $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$, так что $\Gamma_{\lambda\mu\nu}=-\Gamma_{\lambda\mu\nu}$, а значит, $\Gamma_{\lambda\mu\nu}=0$.

Можно ли так подправить ход рассуждений, чтобы, исходя из (48), получить $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$, тождественно не равный 0? Оказывается, можно. Представим четырехмерный элемент длины ds^2 в виде
$$ds^2=g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu}, \tag{50}$$

где $g_{\mu\nu}$ — симметричный тензор, интерпретируемый как метрический тензор.

$g_{\mu\nu}$ зависит от координат в двух случаях: 1) когда речь идет об *искривленном* многообразии, 2) когда рассматривается плоское пространство-время $\mathbb{R}_{1,3}$, но либо используются *неинерциальные* системы отсчета, либо координаты x^{μ} не являются декартовыми.

Пусть мировая линия времениподобна. Напишем условие, что касательный к этой кривой вектор $v^{\mu}=dz^{\mu}/ds$ имеет единичную длину:
$$g_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}=1. \tag{51}$$

Отсюда
$$\frac{d}{ds}\,(g_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu})=v^{\mu}v^{\nu}\,\frac{d}{ds}\,g_{\mu\nu}+2g_{\mu\nu}v^{\mu}a^{\nu}= \\ =v^{\mu}v^{\nu}v^{\lambda}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}+2g_{\mu\nu}v^{\mu}a^{\nu}=0. \tag{52}$$

Рассмотрим теперь так называемый *символ Кристоффеля*
$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}=\frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda}+\partial_{\nu}g_{\lambda\mu}-\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}). \tag{53}$$

Подставим (46) в (48) и для простоты положим $k = 1$. Тогда уравнение движения частицы

$$\frac{dv_\lambda}{ds} + \Gamma_{\lambda\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0 \tag{54}$$

оказывается ортогональным 4-скорости в смысле метрики (50). В самом деле, если свернуть (54) с v^λ и учесть (52), то получим $(1/2)(d/ds)(g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu) = 0$, как и утверждалось.

Уравнение (54) описывает *геодезические* линии в метрике $g_{\mu\nu}$. Мировые линии любых массивных частиц, свободных от воздействия всех негравитационных сил, описываются одной и той же геодезической кривой, если в начальный момент $s = 0$ частицы стартуют из одной точки и имеют одинаковые 4-скорости. Это утверждение остается в силе и для безмассовых частиц, если их мировые линии параметризовать той же переменной эволюции τ, что и мировые линии массивных частиц (например, лабораторным временем t), и в уравнении (54) заменить s на τ, а v^μ на $dz^\mu/d\tau$.

2.5. Структура световых конусов. Пуанкаре первым осознал важность величин, инвариантных относительно группы лоренцевских преобразований, в частности, интервала $dx^2 = dx_0^2 - d\mathbf{x}^2$. Но именно Минковскому мы обязаны пониманием того, сколь фундаментальна роль светового конуса в любых проявлениях релятивистской физики. Мы увидим, как, работая с величинами, имеющими внутренний геометрический смысл в $\mathbb{R}_{1,3}$, легко и удобно искать решение алгебраической части задачи. Но математическим комфортом дело не ограничивается. Вне контекста пространства $\mathbb{R}_{1,3}$ вообще непостижим смысл и невозможны определения ряда фундаментальных физических понятий, например, обсуждавшегося выше понятия электромагнитного поля. Если любое возмущение распространяется со скоростью $|\mathbf{v}| \leqslant 1$, то только обращение к световому конусу дает возможность отследить в этой картине хронологию и причинно-следственную связь событий.

В отличие от евклидова пространства, где все точки равноправны и нет ни одного выделенного направления, в $\mathbb{R}_{1,3}$ ситуация сложнее. Здесь в каждой точке x^μ можно провести световой конус $(x-y)^2 = 0$. При этом $\mathbb{R}_{1,3}$ разбивается на пять областей, в каждой из которых все точки равноправны и нет выделенных направлений. Это три следующие четырехмерные области: 1) внутренность верхней полы светового конуса $(x-y)^2 > 0$, $y_0 > x_0$, 2) внутренность нижней полы светового конуса $(x-y)^2 > 0$, $y_0 < x_0$, 3) область вне светового конуса $(x-y)^2 < 0$, а также две трехмерные области: 4) поверхность верхней полы светового конуса $(x-y)^2 = 0$, $y_0 > x_0$, и 5) поверхность нижней полы светового конуса $(x-y)^2 = 0$, $y_0 < x_0$. Разбиение остается неизменным при действии на $\mathbb{R}_{1,3}$ преобразований специальной ортохронной группы Лоренца

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\, x^\nu, \quad \Lambda^\lambda_\mu\, \eta_{\lambda\nu}\, \Lambda^\nu_\rho = \eta_{\mu\rho}, \quad \det(\Lambda) = 1, \quad \Lambda^0_0 > 0, \tag{55}$$

группы гомотетии (группы масштабных преобразований и трансляций)

$$x'^{\mu} = \lambda\, x^{\mu} + c^{\mu}, \quad \lambda > 0, \tag{56}$$

и четного числа специальных конформных преобразований

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{\sigma(x)}, \quad \sigma(x) = 1 - 2\,(b \cdot x) + b^2 x^2. \tag{57}$$

Преобразования (55)–(57) в совокупности образуют *конформную* группу $C(1,3)$.

Справедлива и обратная теорема: если в линейном нормированном пространстве размерности $D = 4$ общая группа преобразований оставляет неизменной указанное разбиение, то группа сводится к $C(1,3)$ с четным числом преобразований (57) [25].

Таким образом, система световых конусов является наиболее фундаментальной геометрической структурой в пространстве событий. Важно отметить ее бо́льшую общность по сравнению с метрической структурой $dx^2 = dx_0^2 - d\mathbf{x}^2$ пространства Минковского $\mathbb{R}_{1,3}$.

2.6. Совсем приземленные сюжеты. Ниже обсуждаются несколько вопросов, связанных с $\mathbb{R}_{1,3}$, — почти тривиальных для исследователя в физике элементарных частиц. Опыт преподавания в школе и вузах убедил автора в том, что понимание этих вопросов вполне доступно любознательным школьникам и что освоение таких тем должно происходить на самых ранних этапах физического образования.

2.6.1. Кинематика распадов и столкновений. Работа с геометрическими величинами в $\mathbb{R}_{1,3}$, в частности, с 4-векторами, проста и приятна. Проиллюстрировать сказанное позволяет анализ процессов, описываемых в разд. 13.3 и 13.4 первого тома Берклеевского курса общей физики [14]. Начнем с вопроса, почему свободный электрон не может испустить фотон. Предположим противное. Пусть k^{μ}, p^{μ} и p'^{μ} — 4-импульсы фотона, исходного и конечного электрона соответственно. Тогда закон сохранения 4-импульса для этой реакции запишется в виде

$$p^{\mu} = k^{\mu} + p'^{\mu}. \tag{58}$$

Возводя правую и левую части этого уравнения в квадрат, учтем, что $p^2 = p'^2 = m^2$, где m — масса электрона, а $k^2 = 0$, ибо фотон — безмассовая частица. Получим

$$m^2 = 0 + 2k \cdot p' + m^2. \tag{59}$$

Проще всего вычислить скалярное произведение $k \cdot p'$ в системе покоя электрона, где $p'^{\mu} = (m, 0, 0, 0)$, $k^{\mu} = (\omega, \omega\mathbf{n})$, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор, вдоль которого летит фотон в этой системе отсчета; поэтому $k \cdot p' = m\omega$. Таким образом, из (59) мы приходим к заключению, что $\omega = 0$. Но фотона с энергией $\omega = 0$ не существует в природе. В квантовой теории поля нулевой энергией обладает лишь вакуум. Другой, более элементарный довод состоит в том, что энергия ω обратно пропорциональна длине волны фотона λ. Значение энергии $\omega = 0$ соответствует бесконечной длине волны, а такой фотон просто не может поместиться во Вселенной конечных размеров.

Тот же ход рассуждений позволяет понять, почему свободный электрон не может поглотить фотон, или почему реальные электрон и позитрон не аннигилируют в единственный реальный фотон. Уравнение баланса (58) заменяется на $p^\mu + k^\mu = p'^\mu$ или же на $p^\mu + p'^\mu = k^\mu$, где p'^μ обозначает теперь 4-импульс позитрона. Перенося k^μ или p'^μ в правую часть и возводя обе части получившегося уравнения в квадрат, вновь приходим к физически неосуществимому результату $\omega = 0$.

Решим теперь две такие задачи. При соударении быстро движущегося протона с неподвижным протоном возможно образование пары протон–антипротон, в итоге получаются 4 частицы. Какова должна быть минимальная энергия ε движущегося протона, чтобы при его столкновении с неподвижным протоном имела место реакция $p + p \to p + p + p + \overline{p}$? С какими минимальными одинаковыми энергиями ε должны двигаться два протона навстречу друг другу, чтобы при их лобовом столкновении имела место эта реакция?

Ключевое соображение для задач о минимально необходимой энергии состоит в том, что частицы, рожденные в этом процессе, не разлетаются, а остаются рядом, ибо на взаимный разлет потребовалась бы дополнительная энергия, которой по условию задачи у начальных частиц нет. Удобно рассматривать совокупность 4 конечных частиц в системе центра масс, где эти частицы покоятся, и их суммарный 4-импульс P_μ имеет здесь вид $P_\mu = (4m, \mathbf{0})$, соответственно, квадрат этого 4-импульса равен $P^2 = P_0^2 = 16m^2$. Записываем баланс 4-импульсов:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p'^\mu_1 + p'\mu_2 + p'^\mu_3 + p'^\mu_4 = P^\mu. \tag{60}$$

В лабораторной системе, где один из протонов покоится, имеем

$$p_1^\mu = (\varepsilon, \mathbf{p}), \quad p_2^\mu = (m, \mathbf{0}). \tag{61}$$

Возводя левую и правую части уравнения (60) в квадрат, получаем

$$m^2 + m^2 + 2m\varepsilon = 16m^2 \Longrightarrow \varepsilon = 7m. \tag{62}$$

В системе центра масс

$$p_1^\mu = (\varepsilon, \mathbf{p}), \quad p_2^\mu = (\varepsilon, -\mathbf{p}), \quad P^\mu = (4m, \mathbf{0}), \tag{63}$$

следовательно,

$$\varepsilon + \varepsilon = 4m \Longrightarrow \varepsilon = 2m. \tag{64}$$

Следует иметь в виду, что любые процессы распада и образования новых частиц, строго говоря, невозможны в классической картине. Действительно, классическая динамика подчиняется принципу наименьшего действия, а в классическом действии число частиц фиксировано. Поэтому все рассмотренные задачи имеют отношение к квантовой картине.

2.6.2. Движение частицы по прямой линии. Установление связи между четырехмерными величинами и их пространственными компонентами кажется скучным занятием. Оно, однако, необходимо хотя бы для того, чтобы перенести в $\mathbb{R}_{1,3}$ понятия, устоявшиеся в нерелятивистской физике.

В произвольной инерциальной системе отсчета нетрудно с учетом (16) выразить 4-скорость $v^\mu = dz^\mu/ds$ и 4-ускорение $a^\mu = dv^\mu/ds$ через трехмерные скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{a}$:

$$v^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v}), \quad a^\mu = ((\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\gamma^4,\, \mathbf{a}\gamma^2 + \mathbf{v}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\gamma^4). \tag{65}$$

В мгновенно сопутствующей системе отсчета, где $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, эти разложения принимают вид

$$v^\mu = (1,\, \mathbf{0}), \quad a^\mu = (0,\, \mathbf{a}). \tag{66}$$

Поэтому

$$a^2 = -\mathbf{a}^2. \tag{67}$$

Модуль ускорения $|\mathbf{a}|$, измеряемого в мгновенно сопутствующей системе отсчета, оказывается лоренц-инвариантной величиной, равной $\sqrt{-a^2}$.

Пусть частица движется по прямой, например, вдоль оси x. При таком движении тождество (17) принимает вид $v_0^2 - v_1^2 = 1$. Сопоставляя его с тождеством

$$\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1, \tag{68}$$

приходим к следующей координатной записи 4-скорости:

$$v^\mu = (\mathrm{ch}\,\alpha,\, \mathrm{sh}\,\alpha,\, 0,\, 0), \tag{69}$$

где α — произвольная функция s. Продифференцируем (69) по s, получим

$$a^\mu = \dot\alpha\,(\mathrm{sh}\,\alpha,\, \mathrm{ch}\,\alpha,\, 0,\, 0), \tag{70}$$

где точка обозначает производную по s. Из (70) находим квадрат 4-ускорения:

$$a^2 = -\dot\alpha^2. \tag{71}$$

Итак, одномерное движение целиком характеризуется скалярной функцией $\alpha(s)$. Пусть α удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot\alpha = 0. \tag{72}$$

Его интегрирование дает

$$\alpha(s) = \alpha_0 + ws, \tag{73}$$

где α_0 и w — произвольные константы интегрирования. С учетом (71) получаем

$$a^2 = -w^2. \tag{74}$$

Сравнение (74) с (67) показывает, что (73) описывает движение, которое естественно назвать равноускоренным. Релятивистское *равноускоренное* движение определяется таким образом: частица движется равноускоренно, если ее ускорение $\mathbf{a}$, измеряемое в мгновенно сопутствующей системе отсчета, остается одинаковым в любой момент. Как мы увидим ниже, это определение в пределе малых скоростей $|v| \ll 1$ согласуется с привычным понятием равноускоренного движения в нерелятивистской механике.

Для простоты положим $\alpha_0 = 0$, тогда, подставляя (73) в (69), получим

$$v^\mu(s) = (\operatorname{ch} ws,\, \operatorname{sh} ws,\, 0,\, 0). \tag{75}$$

Интегрируя (75), находим мировую линию равноускоренного движения:

$$z^\mu(s) = z^\mu(0) + \frac{1}{w}(\operatorname{sh} ws,\, \operatorname{ch} ws,\, 0,\, 0). \tag{76}$$

В этом разложении легко прочитать, как координаты t и x зависят от s:

$$t - t_0 = \frac{1}{w}\operatorname{sh} ws, \quad x - x_0 = \frac{1}{w}\operatorname{ch} ws. \tag{77}$$

Из (77) получаем траекторию частицы:

$$x - x_0 = \frac{1}{w}\sqrt{1 + w^2(t - t_0)^2}\,. \tag{78}$$

График кривой (76) имеет вид гиперболы, которая асимптотически приближается к лучу светового конуса $t + x = 0$ при $t \to -\infty$ и к другому лучу $t - x = 0$ при $t \to \infty$ (рис. 1). Отсюда происходит название *гиперболическое* движение, используемое в литературе как синоним релятивистского равноускоренного движения.

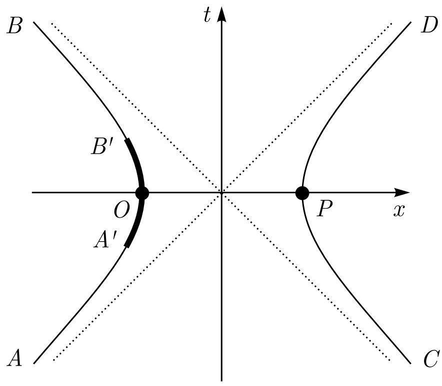

Рис. 1. Мировые линии гиперболического движения

Дифференцируя (78), находим скорость движения частицы вдоль оси x:

$$v = \frac{w\,(t - t_0)}{\sqrt{1 + w^2(t - t_0)^2}}. \tag{79}$$

Скорость v мала, $|v| \ll 1$, на протяжении периода $|t - t_0| \ll w^{-1}$; на рис. 1 это фрагмент гиперболы $A'B'$, близкий по виду к вертикальному отрезку прямой. В этот период (78) и (79) превращаются в нерелятивистские формулы равноускоренного движения: $x = X_0 + (1/2)\,w(t - t_0)^2$ и $v = w(t - t_0)$.

Если используется система единиц, в которой скорость света равна 1, то длина и время измеряются в одних единицах, например, в секундах, скорость безразмерна, а ускорение имеет размерность, обратную времени. Величина, обратная ускорению свободного падения на Земле, g^{-1}, с неплохой точностью ($\sim 3\,\%$) равна одному году. Этим удобно пользоваться в задачах о космических путешествиях, где в расчетах мы имеем дело с безразмерными величинами типа wt. Рассмотрим, например, две следующие типичные задачи. Двигатели ракеты создают постоянное относительно мгновенно сопутствующей ракете инерциальной системы отсчета ускорение $1g$. Как далеко улетит ракета за 40 лет по часам на Земле? Сколько времени, измеряемого в системе отсчета, связанной с ракетой, понадобится космонавту, чтобы удалиться «на край Вселенной», т. е. на расстояние $\approx 1{,}4 \cdot 10^{10}$ световых лет от Земли, и вернуться обратно?

Заметим, что космонавт ощущает обычную земную тяжесть $1g$, а наше удобство в вычислениях состоит в том, что в формулах (78) и (76) мы полагаем $w = 1$ и все размерные величины t, s и x измеряем в годах.

Для ответа на первый вопрос используем формулу (78) и учтем начальное условие $x|_{t=0} = 0$. Тогда

$$x = w^{-1}\sqrt{1 + w^2t^2} - w^{-1} = \sqrt{1 + 40^2} - 1 \approx 39. \tag{80}$$

Ракета удалится от Земли на расстояние примерно 39 световых лет.

Чтобы ответить на второй вопрос, следует понять, что мировая линия состоит из 4 почти гладко сшитых фрагментов равной длительности (разгон + торможение на пути к «краю Вселенной», т. е. фрагменты гиперболы PD и AO на рис. 1, и такие же разгон + торможение на обратном пути, т. е. фрагменты гиперболы OB и CP), каждый из которых описывается формулой (76). Удобно использовать соотношение $\operatorname{arsh} x = \ln\,(x + \sqrt{x^2 + 1}\,)$ и учесть, что искомое время s соответствует движению вдоль пути удвоенной протяженности $x \approx 2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{10}$ световых лет,

$$s = \ln\left(2x + \sqrt{(2x)^2 + 1}\,\right) \approx \ln\,(5{,}6 \cdot 10^{10}) \approx \approx \ln 5{,}6 + 10 \ln 10 \approx 1{,}7 + 23 \approx 25. \tag{81}$$

Космонавт затратит менее 25 лет своей жизни на путешествие к «краю Вселенной» и возвращение на Землю. При этом по земным часам пройдет больше $2{,}8 \cdot 10^{10}$ лет.

Возвращаясь к первой задаче, мы можем подобным образом установить, что при удалении от Земли на расстояние $x \approx 39$ световых лет по часам космонавта пройдет всего $s \approx \ln 2x \approx \ln 7{,}8 + \ln 10 \approx$ $\approx 2{,}1 + 2{,}3 = 4{,}4$ года.

В совокупности эти две задачи служат иллюстрацией к «парадоксу близнецов», а рис. 1 будет полезен в трактовке и других парадоксов, например, «парадокса Белла».

2.6.3. Частица в постоянном однородном электромагнитном поле. Поведение заряженной частицы в электромагнитном поле описывается уравнением движения (26), в котором f^μ представляет собой 4-силу Лоренца (33),

$$m\,\frac{dv^\mu}{ds} = qv_\nu F^{\mu\nu}. \tag{82}$$

Если частица свободная, т. е. $F^{\mu\nu} = 0$, то интегрирование (82) дает прямую мировую линию: $z^\mu(s) = z^\mu(0) + V^\mu s$. Это можно принять в качестве другого определения галилеевской частицы*. Прямая линия — это хорошо определенное геометрическое понятие в $\mathbb{R}_{1,3}$. А в ньютоновой механике не все так просто. Там постулируется, что свободная частица движется *равномерно* по прямой линии при отсчете часов по *абсолютному* ньютоновому времени t. Но если вместо t используется другая шкала времени $\tau = \tau(t)$, то движение, параметризованное переменной τ, уже не будет равномерным.

Пусть поле $F^{\mu\nu}$ постоянно во времени и однородно в пространстве. Тогда в (82) перед нами предстает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, *линейное* относительно неизвестной переменной $v^\mu(s)$. Решение задачи Коши для такого уравнения не представляет трудности. Оно почти очевидно [26]:

$$v^\mu(s) = \Lambda^{\mu\nu}\, v_\nu(0) \equiv \exp\left(\frac{q}{m}\, F^{\mu\nu} s\right) v_\nu(0). \tag{83}$$

Для человека, знакомого с основами алгебры Ли группы Лоренца, это решение напомнит действие элемента группы Лоренца $\Lambda^{\mu\nu}$ на начальную 4-скорость частицы $v^\mu(0)$, причем $F^{\mu\nu}$ является генератором преобразования $\Lambda^{\mu\nu}$. Если этот генератор выразить в терминах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, то $\mathbf{E}$ порождает лоренцевские бусты, а $\mathbf{B}$ — трехмерные вращения.

Вспомним теперь, что любое движение частицы запечатлено в виде кривой на верхней поле гиперболоида $v^2 = 1$. Образ этой кривой явствует из соотношения (83): постоянное и однородное поле конкретного типа

* Негалилеевские свободные частицы могут двигаться иначе: совершать дрожания относительно прямой мировой линии, самоускоряться или самозамедляться [19].

порождает кривую на линии пересечения гиперболоида (17) и плоскости, определяемой 2-формой $F = F_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$. Например, если в некоторой системе отсчета $F^{\mu\nu}$ представлен чисто электрическим полем F^{01}, вектор напряженности которого направлен вдоль оси x, то в пересечении возникает гипербола, прочерчиваемая вектором v^μ вида (75), т. е. мы возвращаемся к мировой линии гиперболического движения (76). Если $F^{\mu\nu}$ представлен магнитным полем F^{23}, направленным вдоль оси z, то сечение гиперболоида плоскостью образует эллипс, т. е. мировая линия изображается в виде спирали с времениподобной осью.

Читатель легко выяснит все прочие соответствия между сечением гиперболоида плоскостью и типом постоянного однородного поля и найдет форму мировой линии.

Для сравнения этой идиллии с трехмерной техникой интегрирования уравнений релятивистской механики* заметим, что уравнение движения Пуанкаре–Планка (15) остается существенно *нелинейным* дифференциальным уравнением при *любой* его правой части.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Первое знакомство студента с уравнениями Максвелла происходит по следующим стандартным путям: в учебнике Джексона [20] они выводятся индуктивным методом, а в курсе теоретической физики Ландау и Лифшица [12] получаются дедуктивно — из принципа наименьшего действия, постулируя действие подходящего вида. Оба пути логически безупречны. Но ни один из них не дает понимания, что же закодировано в этих уравнениях. В XIX в. электродинамику пытались постичь из механики эфира, руководствуясь иллюзорной аналогией с гидродинамикой. Сегодня мы знаем, что уравнения Максвелла являются в значительной степени отражением свойств пространства и времени. Однако сводится ли их содержание целиком к констатации того факта, что ареной событий в нашем мире является $\mathbb{R}_{1,3}$, или они говорят еще о чем-то ином? Попытаемся в этом разобраться.

3.1. Геометрическое содержание уравнений Максвелла. Насколько форма динамического закона для электромагнитного поля продиктована геометрическими особенностями $\mathbb{R}_{1,3}$, в частности, тем, что пространство трехмерно и евклидово? Уравнения (3), (4) формально служат средством отыскания $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ по их производным. Векторную функцию $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ можно восстановить по 9 компонентам ее градиентов $\nabla_i V_j$. Но фактически для этого необходимо знать гораздо меньше. По теореме Гельмгольца [27], если $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ исчезает на бесконечности, то ее однозначно удается восстановить по ее ротору $\mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{V}$ и дивергенции

* К сожалению, эта архаика до сих пор доминирует в ряде курсов теоретической физики.

$D = \nabla \cdot \mathbf{V}$, т. е. по 4 линейным комбинациям производных $\nabla_i V_j$. В этом специфика $\mathbb{R}_3$*. Следующий факт состоит в том, что электромагнитное поле существует как физический объект в $\mathbb{R}_{1,3}$ и его состояния описываются антисимметричным тензором $F^{\mu\nu}$. Предположим, что закон эволюции электромагнитного поля можно сформулировать в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. Из теоремы Гельмгольца следует, что эти уравнения содержат не все 24 компоненты производных $\partial_\lambda F_{\mu\nu}$, а лишь те их линейные комбинации, которые выражаются через роторы и дивергенции векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Таковыми являются

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Big(\operatorname{div}\mathbf{E}, -\dot{\mathbf{E}} + \operatorname{rot}\mathbf{B}\Big) \tag{86}$$

и

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = \Big(\operatorname{div}\mathbf{B},\ -\dot{\mathbf{B}} - \operatorname{rot}\mathbf{E}\Big). \tag{87}$$

Теперь становится понятным происхождение дифференциальных операций rot и div. Они не имеют отношения к вихрям, источникам и стокам величин, описывающих «гидродинамику эфира». Из чисто геометрических соображений возникают полевые уравнения

$$\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = 4\pi j^\mu, \tag{88}$$

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 4\pi m^\mu, \tag{89}$$

где m^μ и j^μ — источники локальных изменений состояния электромагнитного поля. Конструкция и природа m^μ и j^μ на данной стадии остается неопределенной.

3.2. Физическое содержание уравнений Максвелла. Примем теперь три дополнительных предположения негеометрического характера, при помощи которых однозначно реконструируются уравнения Максвелла:

1) *линейность* полевых уравнений (88) и (89) по $F^{\mu\nu}$;
2) обобщенный принцип *действия и противодействия*;
3) отсутствие в природе *магнитных монополей*.

Из предположения 1) и при условии явной лоренцевской ковариантности уравнений следует, что j^μ и m^μ не зависят от $F^{\mu\nu}$. Они могут зависеть только от характеристик частиц, например, от q или $z^\mu(s)$. Каковы эти зависимости? Действуя оператором ∂_μ на (88), получаем $\partial_\mu\partial_\lambda F^{\lambda\mu} \equiv 0$

* Доказательство теоремы Гельмгольца довольно просто. Соотношение

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta\mathbf{V}, \tag{84}$$

известное из векторного анализа, можно переписать в виде уравнения Пуассона

$$\Delta\mathbf{V} = \mathbf{S} \tag{85}$$

с заданной функцией $\mathbf{S} = \nabla D - \nabla \times \mathbf{R}$ в правой части. А принцип экстремума для гармонических функций гласит: решение уравнения (85) единственно при условии, что $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \to 0$ при $\mathbf{x} \to \infty$.

ввиду антисимметричности $F^{\lambda\mu}$ и симметричности $\partial_\mu\partial_\lambda$. Таким образом, уравнение (88) оказывается непротиворечивым, если

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{90}$$

Интегрируя (90) по области, заключенной между двумя пространственноподобными гиперповерхностями Σ_1 и Σ_2 и применяя теорему Гаусса–Остроградского, можно убедиться, что величина

$$Q = \int\limits_\Sigma d\sigma_\mu \, j^\mu, \tag{91}$$

называемая *зарядом-источником*, не зависит от формы и положения поверхности интегрирования Σ. В частности, Q остается неизменным и при сдвиге Σ вдоль оси времени. Уравнение (90) называется локальным законом сохранения заряда-источника. Равенство $Q = \mathrm{const}$, выражающее глобальный закон сохранения этой величины, можно связать с постоянством заряда-связи, выражаемым уравнением (34), если принять предположение 2). Пусть гиперповерхность Σ пересекается N мировыми линиями заряженных частиц. Тогда предположение 2) записывается в виде

$$Q = \sum_{I=1}^N q_I. \tag{92}$$

Представим себе на миг, что во Вселенной существует одна-единственная точечная частица с зарядом-связью q. Тогда

$$Q = q. \tag{93}$$

В этом состоит обобщенный принцип действия и противодействия: заряд-связь как *мера воздействия* на состояние частицы при заданном состоянии электромагнитного поля отождествляется с зарядом-источником, являющимся *мерой воздействия* на состояние электромагнитного поля при заданном состоянии частицы. Поэтому обе величины уместно назвать общим именем *электрический заряд*.

Как реализовать (92) в картине, где заряды переносятся точечными частицами? Во-первых, вектор j^μ, называемый плотностью тока или просто током, представим в виде

$$j^\mu(x) = \sum_{I=1}^N q_I \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds_I \, v_I^\mu(s_I) \, \delta^{(4)}\big[x - z_I(s_I)\big], \tag{94}$$

где $v_I^\mu(s_I)$ — 4-скорость I-й частицы в момент s_I, а $\delta^{(4)}(x) = \delta(x^0)\,\delta(x^1)\times$ $\times\delta(x^2)\,\delta(x^3)$ — четырехмерная δ-функция Дирака. Во-вторых, заметим, что гиперповерхность Σ в (91) произвольна. Пусть же Σ такова, что все мировые линии перпендикулярны к Σ в точках пересечения с ней. В малой окрестности точки пересечения имеем $ds_I \, d\sigma_\mu v_I^\mu = d^4x$, где

x^μ — декартовы координаты в инерциальной системе с осью времени, направленной вдоль v_I^μ. Тогда подстановка (94) в (91) дает (92).

Обратимся теперь к (89) и повторим сказанное с надлежащими изменениями. Магнитный заряд-источник

$$Q^\star = \int d\sigma_\mu \, m^\mu \tag{95}$$

в соответствии с обобщенным принципом действия и противодействия равен сумме магнитных зарядов-связей:

$$Q^\star = \sum_{I=1}^{N} q_I^\star . \tag{96}$$

Комбинируя соотношения (95) и (96) с предположением 3), находим

$$m^\mu = 0. \tag{97}$$

В итоге динамика электромагнитного поля описывается уравнениями (1), (2). Если учесть (86) и (87) и написать компонентное разложение для тока $j^\mu = (\varrho, \mathbf{j})$, то мы возвратимся к уравнениям Максвелла в трехмерной векторной форме (3), (4).

Насколько критично выполнение условий 1)–3)? Нельзя ли их ослабить или заменить другими условиями, отражающими симметрии уравнений Максвелла? Это большая тема, к обсуждению которой мы здесь приступим и будем возвращаться к ней в последующих разделах.

Является ли динамика электромагнитного поля линейной в строгом смысле* или мы имеем дело с первым приближением к описанию природы, которое успешно лишь из-за слабости полей, доступных в условиях современного опыта? Раздвинем рамки теории, отбросив условие линейности, но сохранив условия 2) и 3). Нас встретит безбрежный океан всевозможных нелинейных обобщений электродинамики. Налагая дополнительные условия (не слишком убедительные с позиций сегодняшнего дня), Макс Борн и Леопольд Инфельд предложили вариант нелинейной электродинамики [28]; правда, теория оказалась технически сложной и вскоре исчезла с повестки дня. Но спустя полвека Ефим Самойлович Фрадкин и Аркадий Александрович Цейтлин вернули интерес к электродинамике Борна–Инфельда, показав, что она возникает как эффективная теория в низкоэнергетическом пределе теории струн [29].

Электродинамика Максвелла была исторически первым примером релятивистски сформулированных теорий. Однако уравнения Максвелла инвариантны не только относительно группы Пуанкаре, кото-

* В отношении дифференциальных уравнений, описывающих динамику, требование линейности вызывает подозрение в субъективном стремлении упростить картину в угоду особенностям наших мыслительных процессов, так не пора ли напомнить пословицу: «простота иногда хуже воровства»?

рая включает в себя 6-параметрическую группу Лоренца и 4-параметрическую группу трансляций. Они инвариантны относительно и более широкой 15-параметрической группы конформных преобразований $C(1,3)$. Это открытие совершили Гарри Бэйтман и Эбенезер Каннигхэм в 1909 г. [30, 31]. С тех пор конформная инвариантность превратилась в одну из наиболее интригующих тем исследований в теории поля.

Чем так привлекателен этот вид симметрии? С математической точки зрения $C(1,3)$ является группой наинизшей размерности, содержащей группу Пуанкаре. Примечательно, что группа $C(1,3)$ полупроста, тогда как группа Пуанкаре является полупрямым произведением группы трансляций и группы Лоренца. С физической точки зрения конформная инвариантность интересна тем, что это максимальная пространственно-временная симметрия уравнений Максвелла [32], причем уравнения Максвелла конформно-инвариантны в пространстве-времени размерности $D = 4$ и только в этой размерности. Что до теории Борна–Инфельда, то она не инвариантна относительно группы масштабных преобразований, а значит, и относительно $C(1,3)$.

Другое важнейшее свойство уравнений Максвелла — дуальность электрических и магнитных полей. Впервые идею о том, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ входят в уравнения (3), (4) симметрично, высказал Оливер Хевисайд [33]. Джозеф Лармор заметил, что вид этих уравнений при $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ не меняется при дискретных преобразованиях $\mathbf{E} \to \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \to -\mathbf{E}$ [34]. Юрий Германович Райнич показал [35], что уравнения Максвелла без источников инвариантны относительно дуальных вращений

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}\cos\theta + \mathbf{B}\sin\theta, \\ \mathbf{B}' &= -\mathbf{E}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta. \end{aligned} \tag{98}$$

Существует аналог этих вращений для нелинейных вариантов электродинамики [36]. Иво Бялыницкий-Бируля установил, что теория Борна–Инфельда обладает дуальной симметрией [36].

Герман Вейль полагал [37], что теория Максвелла выделена среди нелинейных обобщений электродинамики тем, что только ей присуща конформная симметрия. Но эта гипотеза не оправдалась. Можно далее предположить, что электродинамика Максвелла — единственная теория, инвариантная относительно группы конформных преобразований и дуальных вращений. Если это верно, то линейность уравнений Максвелла равносильна наличию этих симметрий. Это предположение было также опровергнуто. Существует (единственное) нелинейное обобщение электродинамики, обладающее этим максимально возможным набором симметрий [38, 39]. За ним в литературе закрепилось название *ModMax*.

3.3. Сосуществование электрических и магнитных зарядов. Если отказаться от условия 3), то динамический закон для электромагнитного поля предстанет в виде (88), (89), инвариантном относительно дуальных вращений (98) даже при наличии источников j^μ и m^μ. Вводя обозначения

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - i\,{}^*F^{\mu\nu}, \quad \mathcal{J}^\mu = j^\mu - im^\mu, \tag{99}$$

можно записать два уравнения (88) и (89) в виде единого комплексного уравнения

$$\partial_\lambda \mathcal{F}^{\lambda\mu} = 4\pi \mathcal{J}^\mu, \tag{100}$$

инвариантного относительно дуальных преобразований

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}\,\mathrm{e}^{i\theta}, \quad \mathcal{J}'_\mu = \mathcal{J}_\mu\,\mathrm{e}^{i\theta}. \tag{101}$$

Хотя уравнения (100) обрели дополнительную симметрию (101), теория становится сложнее электродинамики Максвелла–Лоренца, ибо жертвой оказывается понятие вектор-потенциала A_μ, гарантирующее разрешимость уравнений Максвелла.

В течение примерно 100 лет идея магнитных зарядов была изгнана с физической авансцены. Но возмутителем спокойствия стал Поль Адриен Морис Дирак [40, 41], установивший связь между существованием магнитного монополя и дискретностью электрического заряда. Дирак сохранил понятие вектор-потенциала, но вынужден был постулировать сингулярную нить, выходящую из точки нахождения монополя и уходящую в бесконечность. Другая возможность сохранить A_μ состоит в том, что $\mathbb{R}_{1,3}$ гладко отображается на четырехмерное многообразие топологически несколько более сложное, чем $\mathbb{R}_{1,3}$, при помощи вектор-потенциала Ву–Янга [42]. Но в любом случае A_μ теперь представляет собой малопривлекательную конструкцию, причем эстетический ущерб возмещает объяснение Дирака, откуда берется *элементарный* электрический заряд. Другого убедительного объяснения пока не предложено [43].

Дискретность электрического заряда проще всего показать следующим образом. Пуанкаре установил [44], что в бинарной системе «монополь + заряженная частица» нарушен закон сохранения момента импульса $\mathbf{L}$. Это нарушение связано с тем, что учитывается лишь механическая часть момента импульса. Но если учесть вклад электромагнитного поля $\mathbf{l} = -qq^\star\mathbf{n}$, то закон сохранения полного момента импульса $\mathbf{J} = \mathbf{L} - qq^\star\mathbf{n}$ выполняется [45]. В квантовой механике проекция момента импульса $\mathbf{l}$ на любую ось принимает значения, кратные $1/2$ (в единицах $\hbar$). Поэтому выражение $\mathbf{l} = -q\,q^\star\mathbf{n}$ позволяет объяснить квантованность электрического заряда: если во Вселенной существует хотя бы один монополь с магнитным зарядом $q^\star$, то вместе с любой электрически заряженной частицей они образуют систему, для которой имеет место соотношение

$$q\,q^\star = \frac{1}{2}\,n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{102}$$

означающее, что заряд этой частицы q кратен значению $(2q^\star)^{-1}$.

3.4. Самодействие. Переходя к условию 2), отметим два обстоятельства. Во-первых, это условие тесно связано с размерностью пространства-времени D. Действительно, принцип действия и противодействия подразумевает, что число степеней свободы у систем, вступающих в контакт, одинаково. Число компонент тензора электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ равно $(1/2)(D-1)D$, а фазовое пространство частицы имеет размерность $2(D-1)$. Если приравнять эти два выражения, то результатом будет $D=4$*.

Теперь раскрывается смысл обобщенного принципа действия и противодействия. Классическая реальность имеет два структурных элемента — *частицу* и *поле*. Если они представлены в виде заряженной частицы и электромагнитного поля, то эти структурные элементы могут непротиворечивым образом сочетаться лишь в $\mathbb{R}_{1,3}$.

Во-вторых, условие 2) учитывает характер динамики поля. Принцип действия и противодействия применим к электродинамике и теории Янга–Миллса, но не имеет отношения к теории гравитации [10]. Чтобы это проверить, заметим, что в уравнение движения частицы под действием гравитационного поля — уравнение геодезической (54) — вообще не входит масса частицы m. Гравитация действует одинаково на любую частицу, независимо от ее массы. С другой стороны, частицы с разными массами влияют на гравитационное поле по-разному. Пусть в уравнении гравитационного поля [12]

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,R\,g^{\mu\nu}=8\pi G_{\rm N}T^{\mu\nu} \tag{103}$$

источником является тензор энергии-имульса частицы массы $m_{\rm g}$, движущейся вдоль мировой линии $z^\mu(s)$,

$$T^{\mu\nu}=m_{\rm g}\int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\, v^\mu(s)\, v^\nu(s)\, \delta^{(4)}[x-z(s)]. \tag{104}$$

Очевидно, что чем больше $m_{\rm g}$, тем сильнее воздействие на гравитационное поле, характеризуемое величиной $R^{\mu\nu}-(1/2)\,Rg^{\mu\nu}$. Принцип действия и противодействия несовместим с принципом эквивалентности Эйнштейна.

В наиболее обнаженном виде обобщенный принцип действия и противодействия в электродинамике Максвелла–Лоренца проявляет себя в проблеме самодействия [46]. В наивной трактовке эта проблема состоит в отыскании взаимодействия точечной частицы с собственным полем. Однако электромагнитное поле, порождаемое такой заряженной частицей, сингулярно на ее мировой линии, поэтому все измеряемые физические величины (импульс, энергия, момент импульса) даются математически бессмысленными расходящимися выражениями. Применяя методы регуляризации и перенормировки, удается найти конечные, одно-

* Решение $D=1$ не представляет физического интереса. Все, что может произойти в одномерных мирах, лишено наглядного образа.

значно определенные выражения для этих величин, а также уравнение движения точечной заряженной частицы с учетом самодействия — так называемое уравнение Абрагама–Лоренца–Дирака [47–49],

$$ma_\lambda - \frac{2}{3}q^2(\dot{a}_\lambda + a^2 v_\lambda) = qv^\mu F^{\rm ext}_{\lambda\mu}(z)\,. \tag{105}$$

Здесь m — перенормированная масса, представляющая собой конечную сумму массы «голой» частицы m_0 и собственной энергии электромагнитного поля,

$$m = \lim_{\epsilon\to 0}\left[m_0(\epsilon) + \frac{q^2}{2\epsilon}\right], \tag{106}$$

а $F^{\rm ext}_{\lambda\mu}(z)$ — внешнее электромагнитное поле, приложенное к точке z^μ на мировой линии частицы.

С физической точки зрения под самодействием в классической теории следует понимать перекомпоновку исходных степеней свободы голой частицы и аморфного электромагнитного поля, представленных в действии теории Максвелла–Лоренца. В результате этого возникают «одетая» частица и излучение [50–53]. Уравнение (105) есть не что иное, как общее уравнение релятивистской динамики (23) для одетой частицы. В самом деле, если подставить в (23) выражение для 4-импульса одетой частицы

$$p^\mu = mv^\mu - \frac{2}{3}\,q^2 a^\mu, \tag{107}$$

выведенное Клаудио Тейтельбоймом [54], то с учетом тождеств $v\cdot a = 0$ и $v\cdot\dot{a} = -a^2$, вытекающих из дифференцирования тождества (17), получается уравнение (105). С другой стороны, уравнение (105) описывает баланс энергии-импульса на мировой линии одетой частицы: 4-импульс $d\wp^\lambda = -qF^{\lambda\mu}_{\rm ext}\,v_\mu\,ds$, извлекаемый из внешнего поля $F^{\lambda\mu}_{\rm ext}$ на протяжении бесконечно короткого промежутка времени ds, расходуется на изменения 4-импульса dp^λ одетой частицы и 4-импульса $d\mathcal{P}^\lambda$, уносимого излучением,

$$dp^\lambda + d\mathcal{P}^\lambda + d\wp^\lambda = 0. \tag{108}$$

Действительно, подставляя в (108) 4-импульс p^μ одетой частицы (107), 4-импульс внешнего поля $d\wp^\lambda$, т.е. силу Лоренца со знаком минус, $-qF^{\lambda\mu}_{\rm ext}\,v_\mu\,ds$, действующую в течение бесконечно короткого периода времени ds, и дифференциал 4-импульса $\mathcal{P}^\lambda$, равный ларморовской интенсивности излучения [55, 56],

$$\dot{\mathcal{P}}^\mu = -\frac{2}{3}\,q^2 a^2 v^\mu, \tag{109}$$

умноженной на ds, мы вновь приходим к (105).

Важнейшая особенность уравнения Абрагама–Лоренца–Дирака (105) состоит в отсутствии инвариантности относительно обращения времени $s \to -s$, ибо в это уравнение входит неизменное при таком преобразовании 4-ускорение, $a^\mu \to a^\mu$, и его производная $\dot a^\mu$, преобразующаяся как $\dot a^\mu \to -\dot a^\mu$. После перекомпоновки степеней свободы теория Максвелла–Лоренца лишается симметрии относительно обращения времени; излучение является однонаправленным процессом, и уравнение движения одетой частицы (105) отражает необратимость этого процесса.

Похожая ситуация имеет место в теории Янга–Миллса–Вонга [57], описывающей систему K точечных частиц, несущих неабелевы заряды и взаимодействующих с $SU(\mathcal{N})$-значным полем Янга–Миллса, причем $\mathcal{N} \geqslant K+1$. Впрочем, есть и некоторое отличие. В неабелевой фазе частица, ускоряемая внешней 4-силой f^μ, не излучает, а *поглощает* энергию поля Янга–Миллса, $\dot{\mathcal{P}} \cdot v < 0$, поэтому уравнение движения одетой частицы имеет вид

$$m[a^\mu + \ell(\dot a^\mu + v^\mu a^2)] = f^\mu, \tag{110}$$

где ℓ — характерная длина

$$\ell = \frac{8}{3mg^2}\left(1 - \frac{1}{\mathcal{N}}\right), \tag{111}$$

а g — янг-миллсовская константа связи. Интенсивность поглощения и 4-импульс одетой частицы предстают, соответственно, в виде

$$\dot{\mathcal{P}}^\mu = m\ell\, a^2\, v^\mu, \tag{112}$$

$$p^\mu = m(v^\mu + \ell a^\mu). \tag{113}$$

Локальный баланс энергии-импульса, записываемый в прежнем виде (108), гласит: 4-импульс $d\wp^\mu = -f^\mu ds$, извлекаемый из внешнего поля на протяжении бесконечно малого интервала ds, распределяется между изменением 4-импульса одетой частицы dp^μ и «излучением» янг-миллсовского 4-импульса с отрицательной энергией $d\mathcal{P}^\mu$. Очевидно, что и эта динамика необратима во времени.

Самодействие в теории гравитации радикально отличается от того, что мы видели в калибровочных теориях. Принцип действия и противодействия неприменим к теории гравитации. Поэтому здесь отсутствует баланс энергии-импульса на мировой линии частицы (108). Вместо этого мы имеем перекомпоновку степеней свободы, порождающую конфигурации гравитационного поля с нетривиальной топологией, например, в виде черных дыр. Такая динамика тоже необратима во времени.

3.5. $\mathbb{R}_{1,3}$ как априорная форма интуиции. Иммануил Кант считал пространство и время априорными формами интуиции [59], т. е врожденными понятиями. Такая точка зрения была подвергнута всесторонней острой критике с философских и научных позиций. В настоящее время ее принято относить к разряду доктрин, представляющих лишь исторический интерес.

Но посмотрим на кантовский априоризм глазами современного физика. Заметим, что понятия пространства и времени сформированы в нашем сознании как элементы *электромагнитной* картины мира. Для ориентации в пространстве человек снабжен следующим «навигационным оборудованием»: зрительной системой, в которой образы внешнего мира фокусируются глазным хрусталиком на фоточувствительные клетки сетчатки; нервными волокнами, передающими импульсы сетчатки в центральную нервную систему; головным мозгом, обрабатывающим эти импульсы; устройством, преобразующим команды головного мозга в механические движения. Аналогичную навигационную систему имеет любой робот: радары сканируют пространство электромагнитными импульсами в оптическом или инфракрасном диапазоне волн; импульсы по каналу связи поступают в компьютер, а там входные данные обрабатываются и выдаются команды на устройство привода движений.

Главное различие этих устройств состоит в том, что робот снабжен цифровым компьютером для обработки входных данных и выбора команды в соответствии с меняющейся обстановкой, тогда как мозг больше напоминает аналоговый компьютер, в котором эти операции предстают в форме решений задачи Коши для уравнений Максвелла, получаемых за счет имитации наблюдаемых электромагнитных явлений системой электрических токов, циркулирующих в контурах нейросети.

Итак, способность ориентироваться в пространстве и ощущать бег времени связана с кодом в аналоговом компьютере, который позволяет решать уравнения Максвелла, накапливать и хранить в памяти решения, строить их суперпозиции, преобразовывать решения в соответствии с симметриями, присущими уравнениям Максвелла. Этот процесс происходит автоматически и непрерывно. Сведения о свойствах решений в конечном счете развиваются у *homo sapiens* до абстрактных понятий *пространства* и *времени* — что довольно естественно, если иметь в виду геометрическое содержание уравнений Максвелла. Если допустить, что программа безостановочного решения уравнений Максвелла и анализа их свойств вмонтирована в мозг*, то это по сути эквивалентно признанию $\mathbb{R}_{1,3}$ врожденной формой интуиции. В этом, скорее всего, и заключена мораль «урока геометрии», преподанного нам Кантом**.

Зрением обладают многие животные вплоть до осьминогов, червей и насекомых. Ориентируются в пространстве даже инфузории. Живой

* Если бы были вмонтированы не уравнения Максвелла, а их нелинейные обобщения, скажем, уравнения Борна–Инфельда, то линейные комбинации решений были бы излишними, так как они уже не являются решениями; любую задачу Коши для нелинейных уравнений нужно решать отдельно. Память о характерных электромагнитных конфигурациях осталась бы невостребованной, а высшая нервная деятельность лишилась бы таких качеств, как мечты, планирование, мираж, чувство меры, сновидения. Вероятно, это может служить доводом в пользу *линейности* законов электродинамики.

** Пора бы ее оценить — пусть даже годом позже 300-летия со дня рождения великого философа.

организм ощущает и время, благодаря способности отличать свое бытие от инобытия, т. е. существования в виде трупа. Значит ли это, что все живые существа (включая вирусы) обладают даром хроногеометрии, будучи снабжены компьютером с «запаянным» в нем алгоритмом непрестанного решения уравнений Максвелла и обработки этих решений?

Разумеется, осознать конечность земного срока каждого живущего индивидуума способен только человек. Однако любое живое существо ощущает другое важное свойство времени — *однонаправленность* процессов макроскопического окружения. Именно это ощущение лежит в основе инстинкта самосохранения. Чтобы возникло такого рода ощущение, нужны объективные условия для сравнения обратимого и необратимого. Как мы видели в предыдущем подразделе, механизмом, ведущим к необратимости в классической картине, является процесс излучения. Что касается электромагнитной квантовой картины, то в ней процессы обратимы; испускание и поглощение фотона имеют равные амплитуды вероятности. Поэтому обсуждаемый компьютер должен функционировать и в квантовом, и в классическом режимах, допуская возможность переключения (даже через «поломки и ремонт») от одного режима к другому.

Отсюда мы можем попытаться сформулировать критерий по различению живого и неживого:

> *Система, отождествляемая с живым организмом, имеет способность эволюционировать как в классическом, так и в квантовом режимах. Утрата этой способности означает его биологическую смерть.*

Причудлив ход приведенных рассуждений. Мы начинали с того, что понятия пространства и времени могут возникнуть в развитом сознании благодаря имитации структуры пространства событий $\mathbb{R}_{1,3}$ электромагнитными процессами в нейросетях, и дошли до рассмотрения простейших в биологическом отношении образований* — белковых молекул на границе живого и неживого. Здесь получает подтверждение парадоксальный афоризм Карла Маркса: «Анатомия человека — ключ к анатомии обезьяны» [60].

3.6. Теория прямого релятивистского действия. Ввиду линейности уравнений Максвелла их решения могут быть обратимыми во времени. Действительно, можно отказаться от запаздывающего граничного условия и обратиться к сумме запаздывающего и опережающего граничных условий. Такая комбинация полей инвариантна относительно

* Как *физические* системы эти образования чрезвычайно сложны. В будущих исследованиях предстоит выяснить, является ли белковая молекула, проявляющая признаки живого существа, и классическим, и квантовым объектом, в частности, как реализуется принцип неразличимости для таких систем с одинаковым составом частиц (электронов и кварков, образующих атомные ядра).

операции $t \to -t$. Рассматривая такое поле, создаваемое двумя заряженными частицами, мы обнаружим, что в каждой точке поле инвариантно относительно замены местами мировых линий этих частиц.

Итогом таких соображений явилось открытие действия Адриана Фоккера [61]:

$$S_{\mathrm{F}} = -\sum_{I} \int d\tau_I \Biggl\{ m_I \sqrt{\dot{z}_I^2} + \\ + \frac{1}{2} \int d\tau_J \sum_{J(\neq I)} q_I q_J \dot{z}_I^{\mu}(\tau_I)\, \dot{z}_{\mu}^{J}(\tau_J)\, \delta\bigl[(z_I - z_J)^2\bigr] \Biggr\}, \quad (114)$$

описывающее так называемую теорию *релятивистского дальнодействия*. Ее другое название — теория *прямого межчастичного взаимодействия*. Благодаря δ-функции точки z_I и z_J на I-й и J-й мировых линиях отделены одна от другой светоподобным (нулевым) интервалом и могут считаться «непосредственно» взаимодействующими (релятивистское обобщение контактного взаимодействия в механике Ньютона). В действие Фоккера (114) входят запаздывающие и опережающие сигналы на равных основаниях. Но здесь нет вообще автономных полевых степеней свободы. Частица J действует на частицу I *прямо*, т. е. без электромагнитного поля как посредника. Куда же подевались полевые степени свободы? Джон Арчибальд Уилер и Ричард Филлипс Фейнман предположили, что излучение полностью поглощено заряженной материей во всей Вселенной [62, 63]. Как формулируется это предположение?

Запаздывающий вектор-потенциал можно разбить на две части:

$$A^{\mu}_{\mathrm{ret}} \equiv \frac{1}{2}(A^{\mu}_{\mathrm{ret}} + A^{\mu}_{\mathrm{adv}}) + \frac{1}{2}(A^{\mu}_{\mathrm{ret}} - A^{\mu}_{\mathrm{adv}}) = A^{\mu}_{(+)} + A^{\mu}_{(-)}, \quad (115)$$

причем последний член

$$A^{\mu}_{(-)} = \frac{1}{2}(A^{\mu}_{\mathrm{ret}} - A^{\mu}_{\mathrm{adv}}) \quad (116)$$

удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\Box\, A^{\mu}_{(-)} = 0. \quad (117)$$

При нулевых начальных условиях на пространственноподобной гиперплоскости Σ с нормалью n^{μ}: $A^{\mu}_{(-)}|_{\Sigma} = 0$ и $(n \cdot \partial)\, A^{\mu}_{(-)}|_{\Sigma} = 0$, решение задачи Коши для уравнения (117) тривиально:

$$A^{\mu}_{(-)}(x) = 0. \quad (118)$$

Пусть $A^{\mu}_{(-)}(x)$ — вектор-потенциал, порождаемый всеми зарядами во Вселенной. Если $A^{\mu}_{(-)}$ исчезает в определенный момент, то $A^{\mu}_{(-)}(x) = 0$ во все времена. Условие (118) принимается в качестве дополнения к действию (114) и называется условием *полного поглощения*. О таком подходе к релятивистскому дальнодействию говорят как о теории *полного поглощения излучения* [64].

Но условие (118) не означает отсутствие любых эффектов излучения. В самом деле, можно показать, что уравнение Абрагама–Лоренца–Дирака (105) выводится из действия (114) с учетом условия (118) [64]. А нам известно, что (105) — это уравнение локального баланса энергии-импульса (108). Поэтому в картине релятивистского дальнодействия эффект излучения проявляет себя через историю движения частиц.

Теория Фоккера–Уилера–Фейнмана обладает теми же свойствами симметрии, что и теория Максвелла–Лоренца, кроме симметрии относительно группы конформных преобразований $C(1,3)$. Но и эту симметрию легко восстановить [65], заменив в (114) метрику Минковского $\eta^{\mu\nu}$ конформной метрикой Булера–Брауна–Печеи [66].

Релятивистское дальнодействие успешно описывает все* классические явления электромагнетизма и значительную часть квантовых явлений [67]. Отсюда встает вопрос принципиальной важности: существует ли вообще электромагнитное поле как *самостоятельный* физический объект с *автономными* степенями свободы, или его допустимо рассматривать лишь как вспомогательное математическое понятие? Какой экспериментальный результат позволил бы сделать однозначный выбор между этими альтернативами?

Наличие этих альтернатив критически связано с линейностью уравнений поля и предположением о том, что тензор электромагнитного поля выражается в терминах гладкого вектор-потенциала, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, т. е. предположением об отсутствии магнитных монополей.

Поэтому единственная возможность опровергнуть парадигму дальнодействия и подтвердить реальность электромагнитного поля связана с открытием магнитного монополя. Предположим, что сосуществуют магнитный монополь и электрические заряды. Согласно сказанному в п. 3.3 в динамике заряженной частицы мы заметим, что момент импульса $\mathbf{L}$ не сохраняется, причем масштаб нарушения этого закона сохранения $|qq^\star|$ не зависит от расстояния между заряженной частицей и монополем. Но в $\mathbb{R}_{1,3}$ будет выполнен закон сохранения полного момента импульса $\mathbf{J} = \mathbf{L} - qq^\star\mathbf{n}$, в котором учтен вклад электромагнитных степеней свободы, а значит, присутствие электромагнитного поля оказывается достоверным, и релятивистское дальнодействие следует исключить.

4. КАК СОЧЕТАЛИСЬ $\mathbb{R}_{1,3}$ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

В квантовой механике время t имеет особый статус, резко отличающийся от статуса пространственного положения частицы $\mathbf{x}$. Для времени

* За исключением случая, когда Вселенная содержит одну-единственную заряженную частицу.

не существует *оператора* в гильбертовом пространстве состояний. Время является здесь обычным параметром эволюции. В таком качестве t входит в уравнение Шредингера. И дело тут не в том, что уравнение Шредингера исторически возникло в нерелятивистском контексте. Оно с небольшими модификациями благополучно обосновалось и в релятивистской квантовой теории поля, где его обычно называют уравнением Томонаги–Швингера [68]. Однако в квантовой теории поля и координата $\mathbf{x}$ перестает быть оператором, возвращаясь к роли параметра и образуя вместе с t арену $\mathbb{R}_{1,3}$, где разыгрывается драма квантовых полей. Может быть, это развязка истории? Увы, нет, вопросы остаются.

Например, в основе квантово-механического поведения частиц лежит соотношение неопределенности Гейзенберга $\Delta x \Delta p \geqslant (1/2)\hbar$, которое можно математически строго вывести из понимания величин x и p как эрмитовых операторов, удовлетворяющих коммутационному соотношению $[x, p] = i\hbar$. Релятивизм требует предположить, что выполняется «соотношение неопределенности» для времени и энергии $\Delta t \Delta E \geqslant (1/2)\hbar$, хотя оно никак не следует из первых принципов, ибо t не является оператором. Это соотношение, необходимое для квантово-механической теории измерений и трактовки нестабильных частиц как резонансов амплитуд, остается всего лишь эвристическим добавлением к соотношению неопределенности Гейзенберга. Не спасает положения и обращение к формализму квантовой теории поля. Из этого примера легко читается намек на то, что квантовая физика разрушает структуру пространства событий $\mathbb{R}_{1,3}$.

4.1. Класс допустимых мировых линий. Минковский рассматривал мировые линии как гладкие времениподобные кривые. Релятивистские выражения содержат лоренц-фактор γ, который обращается в ∞ при $|\mathbf{v}| \to 1$. Бесконечное значение γ является указанием на невозможность пересечь световой барьер $|\mathbf{v}| = 1$. Геометрически это означает, что кривые, гладко сшитые из времениподобных и пространственноподобных фрагментов, следует исключить из числа мировых линий, допустимых в классической картине.

Такое же ограничение класса допустимых мировых линий следует из требования причинности. Если бы имелся объект, движущийся со сверхсветовой скоростью, то наблюдатель мог бы использовать его для отправки сигнала в собственное прошлое. Непрерывная цепь событий, содержащая такое воздействие на прошлое, называется *причинным циклом*. Наличие сверхсветовых сигналов порождало бы возможность цикла, в котором действия наблюдателя были бы причиной его собственной гибели в прошлом, что свидетельствует об абсурдности такого допущения. Причинный цикл изображается в виде замкнутой мировой линии. Если линия цикла гладкая, то она с необходимостью содержит пространственноподобные фрагменты. Чтобы исключить такие циклы из классической картины, следует считать времениподобные мировые линии с гладкими

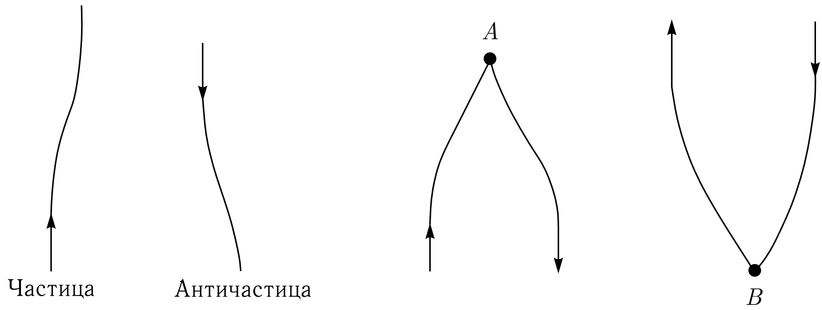

Рис. 2. Мировые линии частиц и античастиц. Аннигиляция и рождение пары

включениями пространственноподобных фрагментов физически нереализуемыми.

Но нельзя ли чуть ослабить требование гладкости, допуская скачки касательных направлений в отдельных точках мировой линии? Для ответа на этот вопрос мы должны выяснить, чему физически соответствуют кусочно-гладкие мировые линии.

Пусть частица движется вдоль времениподобной мировой линии из прошлого в будущее. Ее античастица — объект, тождественный ей во всех отношениях, однако движущийся назад во времени [69], т. е. мировая линия античастицы направлена из будущего в прошлое (рис. 2, слева). Аннигиляцию частицы и античастицы в точке A можно изобразить Λ-образной мировой линией некоторой частицы; эта мировая линия направлена из прошлого в будущее до точки A, где она скачком поворачивает в прошлое. Аналогично рождение пары в точке B изображается V-образной мировой линией одной и той же частицы, движущейся из будущего в прошлое вплоть до точки B, после чего частица резко поворачивает в будущее (рис. 2, справа). Математическое требование исключения Λ- и V-образных кривых из класса допустимых мировых линий означает запрет процессов рождения и аннигиляции. Физические причины исключения Λ- и V-образных кривых из классической картины состоят в следующем.

Принцип наименьшего действия с граничными точками, отделенными одна от другой времениподобным интервалом, не реализуется для таких мировых линий. В самом деле, пространственноподобная гиперплоскость Σ пересекает V-образную времениподобную кривую дважды или не пересекает ее вовсе; то же самое относится к Λ-образным кривым. Напомним, что пространственноподобная гиперплоскость Σ олицетворяет мгновенный снимок пространства в определенный момент времени в некоторой инерциальной системе отсчета, и, стало быть, для реализации принципа наименьшего действия требуется, чтобы мировая линия пересекала Σ в одной точке.

Из времениподобных Λ- и V-образных кривых могут образоваться причинные циклы. Чтобы заведомо исключить такую возможность, решения динамических уравнений следует искать внутри пределов класса времениподобных и светоподобных гладких мировых линий $\mathcal{S}_{\rm class}$. Если $\mathcal{S}_{\rm class}$ представляет истории заряженых частиц, то этим обеспечивается единственность описания запаздывающих электромагнитных полей. Заряженная частица, двигаясь вдоль мировой линии такого рода, порождает математически однозначное запаздывающее поле Лиенара–Вихерта*.

В классической картине частица остается тождественной себе, что, в частности, для заряженных частиц обеспечивается условием (34). На геометрическом языке это означает, что мировые линии нигде не обрываются. Кроме того, мировые линии не испытывают ветвления, ибо процессы распада и слияния частиц несовместимы с принципом наименьшего действия.

Таким образом, общую картину классической эволюции частиц можно наглядно представить себе в виде «ламинарного, незавихренного течения» времениподобных и светоподобных гладких мировых линий. Это течение уместно назвать *потоком Минковского*. В квантовой картине поток Минковского оказывается в той или иной степени «турбулизован».

4.2. Геометрия пространства-времени в квантовом контексте. Квантовый режим эволюции допускает процессы спонтанных распадов и слияний частиц, рождения и аннигиляции пар. Становится осуществимым причинный цикл для *виртуальных* частиц. Эти утверждения можно выразить и более формальным образом: квантовый режим характеризуют *петлевые* диаграммы Фейнмана в теории возмущений, а квазиклассическому режиму соответствуют *древесные* диаграммы.

Стандартный вывод этого критерия основан на сравнении степеней константы Планка $\hbar$, фигурирующих в виде общего фактора в различных членах ряда теории возмущений. Но разделение диаграмм на древесные и петлевые не имеет отношения к вопросу, присутствует или нет фактор $\hbar^n$ в данном выражении. Вовлеченность в квантовый режим определяется тем, насколько «искажен» поток Минковского от появления завихренностей мировых линий. Для сравнения классической и квантовой картин удобно обратиться к методу функционального интегрирования [70].

Динамику квантово-механической частицы описывает фейнмановский интеграл по путям

$$K(\mathbf{z}_f, T|\mathbf{z}_i, 0) = \int [\mathcal{D}\mathbf{z}] \, \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\, L(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})\right], \tag{119}$$

* Граничное условие запаздывания полей однозначно согласовано именно с такой совокупностью историй точечных источников. Ограничения, налагаемые на $\mathcal{S}_{\rm class}$, невозможно ослабить без утраты однозначности запаздывающего поля.

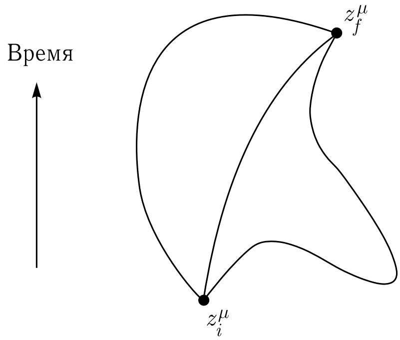

Рис. 3. Мировые линии, дающие вклад в функциональный интеграл

где $[\mathcal{D}\mathbf{z}]$ обозначает меру интегрирования в пространстве всех путей от $\mathbf{z}_i(0)$ до $\mathbf{z}_f(T)$. Какова бы ни была мировая линия $z^\mu(\tau)$, проходящая через точки $x^\mu = (0, \mathbf{z}_i)$ и $x^\mu = (T, \mathbf{z}_f)$ (рис. 3), она дает вклад в функциональный интеграл при условии, что лагранжиан L остается вещественным, а выражение (119) хорошо определено для такого пути.

Например, лагранжиан Пуанкаре–Планка для свободной частицы

$$L = -m\sqrt{\dot z^2} \tag{120}$$

является вещественным и конечным лишь для времениподобных путей. Если $z^\mu(\tau)$ — светоподобная кривая, то $L = 0$. Если $z^\mu(\tau)$ — пространственноподобная кривая, то L принимает комплексные значения, а поскольку мнимая часть L может принимать как положительные, так и отрицательные значения, выражение (119) не определено. Напротив, лагранжиан, предложенный в [71],

$$L = -\frac{1}{2}\left(\eta\,\dot z^2 + \frac{m^2}{\eta}\right), \tag{121}$$

остается вещественным и конечным для любых кривых — времениподобных, светоподобных, пространственноподобных и их комбинаций.

В квазиклассическом случае вклад в интеграл (119) члена, соответствующего наименьшему действию, доминирует, поэтому интегрирование по остальным путям дает лишь поправочный предэкспоненциальный множитель. Но в сугубо квантовом режиме вклады вдоль любых путей оказываются сравнимыми, и следует учитывать, например, вклады вдоль Λ- и V-образных кривых. Другими словами, в квантовой картине существенны процессы рождения и аннигиляции пар.

Сравним теперь законы распространения классических и квантовых полей. В классической картине частица и поле — это две совершенно различные сущности. Квантовая картина описывает единую сущность, квантованное поле, возбуждения которого соответствуют определенной классической частице [68].

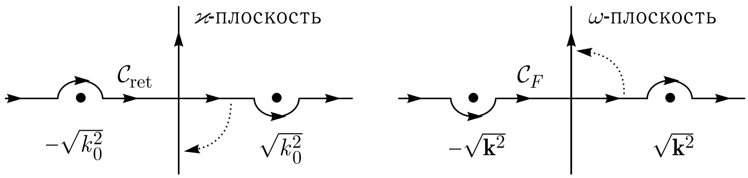

Рис. 4. Контуры интегрирования $\mathcal{C}_{\mathrm{ret}}$ и $\mathcal{C}_F$ для $\widetilde{D}_{\mathrm{ret}}$ и $\widetilde{D}_F$

Для простоты возьмем безмассовое скалярное поле. Фурье-образ запаздывающей функции Грина

$$\widetilde{D}_{\mathrm{ret}}(k) = -\frac{1}{k^2 + 2ik_0\epsilon} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 - (k_0 + i\epsilon)^2} \tag{122}$$

дает точное представление о том, как поле распространяется в классической теории. Если интегрирование по переменной $\varkappa = |\mathbf{k}|$ выполнить первым*, то полюсы в точках

$$\varkappa = \pm\sqrt{k_0^2} \pm i\epsilon \tag{123}$$

обходятся контуром, изображенным на рис. 4, слева.

Распространение свободного безмассового поля в квантовой теории описывается фейнмановским пропагатором (вычисленным, например, с помощью интеграла по путям (119) с учетом вкладов любых путей),

$$\widetilde{D}_F(k) = -\frac{1}{k^2 + i\epsilon}. \tag{124}$$

Отсюда получается предписание для обхода полюсов

$$\omega \equiv k_0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2} \mp i\epsilon\,. \tag{125}$$

Контур интегрирования $\mathcal{C}_F$ в комплексной ω-плоскости изображен на рис. 4, справа.

На первый взгляд, между пропагаторами, удовлетворяющими запаздывающему и причинному граничным условиям, нет ничего общего. Но это отнюдь не так. Чтобы перекинуть мост между классическим и квантовым описаниями функций Грина, нужно подвергнуть их «евклидеанизации»**.

---

* Мы предполагаем, что угловые переменные уже проинтегрированы, и полученное выражение может быть однозначно продолжено на отрицательную полуось $\varkappa$.

** В действительности это нечто большее, чем ловкий математический прием. Если гамильтониан ограничен снизу, то с помощью виковского вращения [72] производится аналитическое продолжение к мнимому времени, в результате чего получается «евклидов» функциональный интеграл, мера в котором вполне математически определена, и с ним удобно проводить конкретные вычисления [73], в отличие от плохо определенного фейнмановского интеграла в его исходной формулировке (119).

Если подынтегральное выражение убывает достаточно быстро при $\varkappa \to \infty$, то контур интегрирования $\mathcal{C}_{\rm ret}$ в комплексной $\varkappa$-плоскости можно повернуть по часовой стрелке на угол $\pi/2$, не задевая полюсов, рис. 4, слева. Это аналитическое продолжение к мнимым значениям в комплексной $\varkappa$-плоскости — операция, подобная виковскому вращению. Введение новой переменной $\mathbb{K} = i\mathbf{k}$ превращает квадрат вектора k^μ в положительно определенную величину:

$$k_E^2 = k_0^2 + \mathbb{K}^2. \tag{126}$$

Аналитическое продолжение пространственных переменных на мнимую ось, $\mathbb{X} = i\mathbf{x}$, выполненное вместе с аналитическим продолжением в $\mathbf{k}$-пространстве, доставляет евклидову метрику

$$dx_E^2 = dx_0^2 + d\mathbb{X}^2. \tag{127}$$

Если выполнить виковское вращение контура интегрирования $\mathcal{C}_F$ против часовой стрелки на угол $\pi/2$ в комплексной ω-плоскости, не задевая полюсов (см. рис. 4, справа), что эквивалентно введению новой переменной $k_4 = ik_0$, то квадрат длины вектора k^μ станет отрицательно определенным:

$$k_E^2 = -(k_4^2 + \mathbf{k}^2). \tag{128}$$

Аналитическое продолжение временно́й переменной на мнимую ось, $x_4 = -ix_0$, одновременное с виковским вращением, дает отрицательно определенный линейный элемент

$$dx_E^2 = -(dx_4^2 + d\mathbf{x}^2). \tag{129}$$

Итак, мы видим, что достаточно заменить общий знак пространственно-временно́й сигнатуры в классическом описании функции распространения полей, чтобы перейти к квантовому описанию, ибо две лоренцевские метрики противоположной сигнатуры всегда могут быть аналитически продолжены к двум евклидовым элементам длины противоположных знаков, как это представлено в (127) и (129).

Сам по себе общий знак лоренцевской метрики неважен, его выбор есть вопрос соглашения. В динамических задачах удобно принять «в основном отрицательную» сигнатуру $(+ - --)$, а при изучении свойств гиперповерхностей предпочтительней «в основном положительная» сигнатура $(- + ++)$. Но если общий знак сигнатуры меняется при переходе из одной области пространства-времени в соседнюю область, то это замена знака указывает на переключения между классическим и квантовым режимами распространения полей.

Такая ситуация характерна для *горизонта событий*, отделяющего внутренность черной дыры от внешнего окружения. В качестве простейшего примера рассмотрим шварцшильдовскую метрику, описывающую геометрию изолированной сферически-симметричной черной дыры [12],

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega. \qquad (130)$$

Здесь $r_{\mathrm{S}} = 2GM$ — шварцшильдовской радиус, соответствующий горизонту событий этой черной дыры. Во внешней области, $r > r_{\mathrm{S}}$, вектор Киллинга $X = \partial_t$ принято интерпретировать как асимптотический сдвиг во времени. Во внутренней области, $r < r_{\mathrm{S}}$, временно́й координатой становится r, а интегральными линиями векторного поля $X = \partial_r$ служат времениподобные геодезические, обрывающиеся в точке $r = 0$. После евклидеанизации внутренняя и внешняя области становятся многообразиями с евклидовыми метриками, соответственно, типа (127) и (129). Следуя обратному ходу рассуждений, мы будем вынуждены заключить, что горизонт событий черной дыры является границей, отделяющей классическую физику от квантовой [74].

4.3. Пространство, время, материя, случайность. Мы выяснили, что в отличие от классической реальности, где самой совершенной геометрической моделью является $\mathbb{R}_{1,3}$ — детище Пуанкаре и Минковского, квантовая реальность «геометрически всеядна». Расчеты квантовых явлений удобно выполнять после евклидеанизации — перехода от $\mathbb{R}_{1,3}$ к $\mathbb{R}_4$. Для анализа основ квантовой теории поля требуется комплексифицировать пространство событий, т. е. превратить $\mathbb{R}_{1,3}$ в $\mathbb{C}_4$ [75–77]. Однако прежде чем судить о достоинствах геометрических моделей реальности, было бы желательно иметь *общее определение* понятий пространства и времени. Как его сформулировать?

За отправной пункт примем бесспорное утверждение: «Физическая реальность обладает структурой». Элементами структуры мы считаем материальные объекты, например, частицы. Объект допустимо представлять себе как существующий или как несуществующий. Однако переходя от логики к реальности, мы обнаруживаем, что симметрия между бытием и небытием нарушается. Если частица не существует, то это четкий и недвусмысленый факт. С другой стороны, если частица существует, то это можно понимать двояко: либо как то, что хотя она и не предъявлена, но все же существует, либо в наглядном смысле — как наличие частицы в данном месте и в данный момент. Вмешательство уточнений «здесь» и «сейчас» приводит к выводу о неравнозначности бытия и небытия реального объекта. Отсюда представляется разумным предложить следующее определение:

> *Пространство и время — понятия, выражающие нарушение симметрии между существованием и несуществованием структурных элементов физической реальности.*

Этим ограничено чисто онтологическое содержание определяемых понятий. Что же касается геометрических моделей, то в них трудно отделить объективные факты от особенностей наших мыслительных процессов и обстоятельств истории познания. Веками люди верили в античный геоцентризм; за ним следовала эпоха ньютоновского абсолютного пространства и абсолютного времени; и, наконец, наш ум пленил мир Минковского $\mathbb{R}_{1,3}$, открывший новые глубины классической реальности.

Но структура физической реальности не обязана проявлять экзистенциальную определенность. Бытие элемента структуры может быть и *случайным*. Именно такой является квантовая реальность. Ее структурные элементы по-прежнему называются частицами, но, с точки зрения классического наблюдателя, поведение таких частиц подчиняется *вероятностным* законам. Частицы способны *спонтанно* превращаться в другие частицы. Например, d-кварк склонен к β-распаду:

$$d \to u + e + \overline{\nu}_e. \tag{131}$$

Состояние d-кварка представляет собой суперпозицию состояний нераспавшегося d-кварка и продуктов его распада, т. е. в любой момент с некоторой вероятностью W этот d-кварк все еще существует, а с вероятностью $1 - W$ уже не существует.

Однако отсутствие экзистенциальной определенности типично и для стабильных квантовых объектов, например, электронов. В отличие от классической частицы, сохраняющей свою индивидуальность на протяжении всей своей истории, электрон вообще не заботится о «сохранении лица». Он тождествен любому электрону в любом уголке Вселенной, даже еще не появившемуся на свет электрону в реакции (131), и принципиально неотличим от него.

Чтобы физически реализовать вероятностный закон, управляющий случайным поведением некоторой системы, необходимо иметь *статистический ансамбль* таких систем [78]. А так как речь идет о системе, тождественные и неразличимые элементы которой занимают всю пространственно-временну́ю арену, нам следует выяснить, каковы основания предполагать наличие ансамбля таких арен.

В начале 1980-х гг. Майкл Фридман [79] и Саймон Дональдсон [80] установили фундаментальный математический результат: оказывается, существуют четырехмерные многообразия гомеоморфные (т. е. топологически эквивалентные), но не диффеоморфные (т. е. дифференциально-геометрически не эквивалентные) евклидову пространству $\mathbb{R}_4$, причем каждое из них является гладким многообразием. Такие многообразия называются *экзотическими*. В дальнейшем было выяснено, что имеется целый континуум четырехмерных экзотических многообразий. В любых других измерениях D экзотические гладкие структуры на $\mathbb{R}_D$ отсутствуют. Другими словами, если $D \neq 4$, то любое гладкое многообразие, гомеоморфное $\mathbb{R}_D$, оказывается диффеоморфно $\mathbb{R}_D$. Систематическое изложение теории экзотических многообразий можно найти в книгах [81] и [82].

Совокупность экзотических многообразий как раз и образует ансамбль арен для квантовой драматургии. Интересно, что объективные математические основания для объединения в ансамбль существуют лишь в случае $D = 4$. Если же $D \neq 4$, то вместо ансамбля *случайных* вариантов гладких структур Вселенной мы имеем набор клонов Вселенной, пригодных разве что для *имитации* случайности. Таким образом, основы квантовой физики, как мы их сегодня понимаем, статистически неосуществимы в мирах с числом измерений $D \neq 4$.

Экзотические многообразия пока не нашли своего практического применения в квантовой теории*. Работать с ними трудно даже для математиков экстракласса. Ситуация здесь напоминает ту, что сложилась к началу XVII в. до изобретения прямоугольной системы координат и аналитической геометрии в знаменитом труде Рене Декарта «Discours de la methode».

5. ПОСТИЖЕНИЕ ГРАВИТАЦИИ

Пытаясь вывести простейшее выражение для гравитационной 4-силы при должном учете феноменологии — равенстве инертной и тяжелой масс и отклонении луча света от прямой под действием гравитационного поля Солнца, мы заключили в п. 2.4, что описание гравитации невозможно без *искривления* пространства-времени. Впервые этот вывод был получен Эйнштейном, который исходил из других посылок — принципа эквивалентности и условия равноправия произвольных систем отсчета [3]. Получение результата разными способами придает уверенность в его правильности. В данном случае это тем более важно, что следствия полученного результата крайне драматичны: при отказе от пространства Минковского $\mathbb{R}_{1,3}$ в пользу псевдориманова многообразия $\mathfrak{R}_{1,3}$ пали жертвой великие научные достижения XVIII и XIX вв. — законы сохранения энергии, импульса и момента импульса.

Из теоремы Эми Нётер [83] следует, что сохранение энергии-импульса связано с *однородностью* пространства-времени, а сохранение момента импульса обусловлено *изотропией* пространства. Однако искривленные многообразия $\mathfrak{R}_{1,3}$ — в отличие от плоского пространства-времени $\mathbb{R}_{1,3}$ — не обладают этими свойствами симметрии.

Пуанкаре считал, что выбор геометрии является вопросом соглашения. Истинной геометрии физического мира не существует. Ее выбирают из соображений удобства. Для Пуанкаре евклидова геометрия пространства казалась самой удобной. Можно, конечно, принять иную модель пространства-времени, изменив должным образом физические законы; в итоге все множество физических событий и связей между ними

* Возможно, экзотические многообразия проникнут в формализм квантовой теории поля через функциональное интегрирование многообразий не только по различным топологиям, но и по любым экзотическим гладким структурам.

останется прежним [84]. Это своего рода принцип дополнительности геометрии и физики. Отсюда проистекают попытки построить теории гравитации с тензорным полем второго ранга $\phi_{\mu\nu}$, не выходя за рамки пространства Минковского [85]. В таких теориях воспроизводились эффекты общей теории относительности, но лишь для слабого гравитационного поля, т. е. если в соотношении $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}$ компоненты тензора $\phi_{\mu\nu}$ малы в любой инерциальной системе отсчета, $|\phi_{\mu\nu}| \ll 1$.

Более масштабный проект [86] заключался в построении биметрической теории гравитации с двумя аренами — искривленной $\mathfrak{R}_{1,3}$ и плоской $\mathbb{R}_{1,3}$, так чтобы динамика $\mathfrak{R}_{1,3}$ была эквивалентна динамике общей теории относительности, а проекция $\mathfrak{R}_{1,3}$ на фоновое пространство $\mathbb{R}_{1,3}$ порождала теоретико-полевую трактовку гравитации и законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Однако эквивалентность динамик здесь достижима лишь в том случае, когда $\mathfrak{R}_{1,3}$ топологически эквивалентна $\mathbb{R}_{1,3}$, т. е. опять для слабых полей. Усилия, направленные на изобретение механизма, исключающего решения с нетривиальной топологией, например, решения, в которых пространство-время свободно от черных дыр, не имели особого успеха.

К спасению законов сохранения было приложено много усилий, главным образом применительно к модели «островной Вселенной», в которой вся материя компактно сосредоточена в конечной части пространства, а вокруг нее — вакуум. В такой модели с любым строением «острова» пространство оказывается *асимптотически плоским*, и это служит предпосылкой к гамильтонову описанию такой системы [87].

Понятие асимптотически плоского пространства не имеет четкого определения. Качественно речь идет об исчезновении кривизны на бесконечности: $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \to 0$ при $r \to \infty$, и выборе координат, обеспечивающем сходимость всех аддитивных величин, например, гамильтониана. Но эти требования недостаточно ограничительны, чтобы устранить произвол в выборе расслоения $\mathfrak{R}_{1,3}$ на пространственноподобные сечения в согласии с условием асимптотической плоскостности. Свобода выбора масштабной сетки приводит к тому, что энергия шварцшильдовской черной дыры, порожденной звездой массы M, может принимать любое значение — большее или равное M [88].

Наличие плохо определенных аддитивных величин в теории гравитации весьма напоминает теорему Банаха–Тарского [89] (обсуждению этой теоремы посвящена книга [90]). Согласно этой теореме трехмерный шар можно разбить на несколько частей, которые затем собираются непрерывным перемещением без изменения их формы и без прохождения одной части сквозь другую. В результате возникает шар вдвое больший исходного. Объем шара в теореме Банаха–Тарского дается обычной трехмерной мерой Лебега, а энергию черной дыры описывает линейный функционал, мера которого определяется гамильтонианом Арновита–Дезера–Мизнера [87].

Обсуждать парадокс Банаха–Тарского применительно к физике не принято по той простой причине, что макроскопические объекты состоят из атомов. Разбиение математического континуума на части не имеет отношения к раздроблению твердых тел; нельзя разрезать апельсин на конечное число кусков, а затем собрать их так, чтобы образовался шар размером с Солнце. Но в этом рассуждении упущен один важный случай — черная дыра. Любая изолированная стационарная черная дыра полностью характеризуется тремя параметрами: ее массой M, моментом импульса J и электрическим зарядом Q. Индивидуальные свойства коллапсирующей системы не отпечатываются на облике получающейся черной дыры, ибо ее внешнюю часть описывает решение Керра–Ньюмена. Черная дыра лишена зернистой структуры. В отличие от обычных квантово-механических связанных систем черная дыра не обладает дискретным спектром энергии. А линейный функционал, ассоциируемый с энергией черной дыры, допускает превращения в духе теоремы Банаха–Тарского.

Гравитация не является обычным физическим полем, обладающим однозначно определенными энергией и импульсом. Этим она кардинально отличается от трех других фундаментальных взаимодействий. Возможно, все энергетические неувязки, трудности и парадоксы, связанные с гравитацией, имеют единую фундаментальную первопричину. О чем тут может идти речь? Основанием для сохранения импульса в механике Планк считал реализацию принципа действия и противодействия [58]. Но, как отмечено в п. 3.4, к общей теории относительности этот принцип не имеет отношения. Разумно предположить, что выполнение (или нарушение) закона сохранения энергии-импульса и принципа действия и противодействия происходит совместно [46]. Разрыв в описании гравитации и трех других фундаментальных сил бросает вызов программе унификации — краеугольному камню современной физики.

6. МАГИЯ $\mathbb{R}_{1,3}$

А не впадаем ли мы в самообман, приписывая реальности свойства $\mathbb{R}_{1,3}$? Более двух тысячелетий люди думали, что геометрия Евклида является единственно верным отражением свойств пространства, пока в начале XIX в. эту веру не пошатнули Николай Иванович Лобачевский, Янош Больяи и Карл Фридрих Гаусс. Выяснилось, что мыслимых вариантов непротиворечивых геометрий бесконечно много.

Клейн, обнаружив связь между структурой геометрии и группой допустимых преобразований ее элементов — автоморфизмов, ясно осознал, что лицо геометрии определяется группой автоморфизмов [91]. Дальнейший ход развития математики выдвинул на авансцену многообразия — произвольно искривленные геометрические объекты любой размерности. Но и здесь подход Клейна остался в центре построений, поскольку многообразие локально устроено как линейное пространство, метрический вид которого определяется конечно-параметрической группой автоморфизмов.

С познавательной точки зрения это обстоятельство на редкость благоприятно. Из него следует, что хотя геометрий бесконечно много, их набор можно охватить взором и подвергнуть четкой классификации. А отсюда, если повезет, мы доберемся и до «физически заветного» варианта геометрии. Так оно и оказалось. Судите сами.

Непрерывные простые группы были классифицированы Вильгельмом Карлом Йозефом Киллингом [92], Эли Жозефом Картаном [93] и Германом Вейлем [94]. Имеется четыре ряда классических групп: специальные унитарные группы $SU(n)$, специальные ортогональные группы нечетного порядка $SO(2n+1)$, симплектические группы $Sp(2n)$, специальные ортогональные группы четного порядка $SO(2n)$, а также пять исключительных групп: G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

Среди перечисленных групп существует единственный *особый* случай. Группа $SO(4)$ *не проста*, она является прямым произведением простых групп $SO(3) \times SO(3)$. Ее комплексификация $SL(4,\mathbb{C})$ имеет несколько вещественных реализаций. Все они также не являются простыми группами, за одним исключением — группы Лоренца $SO(1,3)$ [95]. Согласно Клейну, приняв $SO(1,3)$ в качестве группы автоморфизмов, мы приходим к геометрии пространства $\mathbb{R}_{1,3}$.

Как отмечалось в п. 2.5, важное свойство пространства Минковского $\mathbb{R}_{1,3}$ состоит в наличии структуры световых конусов. Геометрические конструкции, определяемые другими группами автоморфизмов, — все, кроме $\mathbb{R}_{1,n}$, такого достояния лишены. Это, разумеется, не означает их физической бесполезности. В самом деле, автоморфизмы фазовых пространств образуют симплектические группы $Sp(2n)$, а автоморфизмы гильбертова пространства состояний квантово-механических систем образуют унитарные группы. Отсутствие системы световых конусов не считается пороком этих пространств. Лишь $\mathbb{R}_{1,n}$ ассоциируются в нашем сознании с геометрией пространства и времени. Например, теории струн оказываются непротиворечивыми только в многообразиях, локально подобных $\mathbb{R}_{1,9}$ или $\mathbb{R}_{1,23}$ [96], а подходящей ареной для M-теории считаются многообразия, локально подобные $\mathbb{R}_{1,10}$ [97].

В 1971 г. физики СССР и Запада изобрели *суперсимметрию* — группу симметрии между фермионными и бозонными степенями свободы [98–102]. С геометрической точки зрения в супергруппе переплелись пространственно-временные координаты с грассмановыми, внутренними переменными квантовых полей. В суперсимметричных моделях расходимости сокращаются в однопетлевом приближении, и были найдены ультрафиолетово-конечные во всех порядках теории возмущений модели. Возникла надежда на построение конечной теории всех четырех фундаментальных сил, если пройти на шаг дальше Минковского в раскрытии геометрической тайны природы. Однако никаких следов суперсимметрии при доступных на сегодня энергиях столкновений 13 ТэВ не обнаружено.

Поэтому идея суперпространств пока остается необыкновенно изящной игрой ума с невыясненным отношением к физической реальности.

Статус пространства Минковского $\mathbb{R}_{1,3}$ как наиболее совершенной геометрической модели физической реальности укрепился с открытием экзотических пространств, подчеркнувшим *объективную* выделенность $D = 4$. Какова дальнейшая судьба $\mathbb{R}_{1,3}$? Прогноз, говорят, дело рискованное. Но, кажется, сто́ит рискнуть, предположив, что мы находимся на пороге новых грандиозных событий в теоретической физике, вероятно, связанных с разработкой простой техники для анализа квантовой картины в терминах экзотических пространств, а значит, и нового взгляда на $\mathbb{R}_{1,3}$.

Финансирование. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Российского федерального ядерного центра — ВНИИЭФ. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Minkowski H.* Raum und Zeit // Phys. Z. 1908. V. 10. P. 75–88;
   Минковский Г. Пространство и время // Принцип относительности: Сб. ст. / Под ред. А. А. Тяпкина. М.: Атомиздат, 1973. С. 167–180.
2. *Pais A.* Subtle Is the Lord... The Science and the Life of Albert Einstein. Oxford: Oxford Univ. Press, 1982. P. 152;
   Пайс А. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. М.: Наука, 1989. С. 148.
3. *Einstein A., Grossmann M.* Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitation // Z. Math. Phys. 1913. V. 62. P. 225–261;
   Эйнштейн А. Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения // Собр. науч. тр. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 227–267.
4. *Klein F.* The Mathematical Theory of the Top. New York: Scribners, 1897.
5. *Poincaré H.* L'etat actuel et l'avenir de la Physique mathematiqie // Bull. Sci. Math. 1904. V. 28. P. 302;
   Пуанкаре А. Настоящее и будущее математической физики // Принцип относительности: Сб. ст. / Под ред. А. А. Тяпкина. М.: Атомиздат, 1973. С. 27–44.
6. *Einstein A.* Zur Elektrodynamik der bewegter Körper // Ann. Phys. 1905. V. 322. P. 891–921;
   Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел // Собр. науч. тр. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 7–35.
7. *Poincaré H.* Sur la dynamique de l'électron // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1906. V. 21. P. 129–176;
   Пуанкаре А. О динамике электрона // Избр. тр. Т. III. М.: Наука, 1974. С. 118–161.

8. *Leibniz G. W.* Essais de Théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté de l'homme et l'origine du mal. Amsterdam: Boudestein, 1710;
Лейбниц Г. В. Опыты теодицеи о благости Божией, свободе человека и начале зла. М.: Мысль, 1989. С. 560.
9. *Kosyakov B. P.* The Pedagogical Value of the Four-Dimensional Picture: I. Relativistic Mechanics of Point Particles // Eur. J. Phys. 2014. V. 35. P. 025012; arXiv:physics/2205.01186.
10. *Kosyakov B. P.* The Pedagogical Value of the Four-Dimensional Picture: II. Another Way of Looking at the Electromagnetic Field // Eur. J. Phys. 2014. V. 35. P. 025013; arXiv:physics/2205.01181.
11. *Chubykalo A. E., Espinoza A., Kosyakov B. P.* The Pedagogical Value of the Four-Dimensional Picture: III. Solutions to Maxwell's Equations // Eur. J. Phys. 2016. V. 37. P. 045202; arXiv:physics/2205.01326.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. Теоретическая физика. Т. II. 6-е изд. М.: Наука, 1973;
Landau L. D., Lifshitz E. M. The Classical Theory of Fields. New York: Butterworth; Heinemann, 1980.
13. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 1 и 3. М.: Наука, 1974, 1977.
14. Berkeley Physics Course. V. 1. Mechanics. V. 2. Electricity and Magnetism. New York: McGraw-Hill, 1965;
Берклиевский курс физики. Т. 1. Механика. Т. 2. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1983.
15. *Kosyakov B. P.* Massless Interacting Particles // J. Phys. A. 2008. V. 41. P. 465401; arXiv:hep-th/0705.1228.
16. *Seifert H., Threlfall W.* Lehrbuch der Topologie. Leipzig: Teubner, 1934. S. 2; 315;
Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. Ижевск: НИЦ «Регуляр. и хаот. динамика», 2001. С. 12; 399.
17. *Planck M.* Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik // Verhandlungen der deutschen physikalische Gesellschaft. 1906. V. 8. P. 136–141;
Планк М. Принцип относительности и основные уравнения механики // Избр. тр. М.: Наука, 1975. С. 445–448.
18. *Hartle J. B.* Gravity. An Introduction to Einstein's General Relativity. San Francisco: Addison–Wesley, 2003.
19. *Косяков Б. П.* Об инертных свойствах частиц в классической теории // ЭЧАЯ. 2003. Т. 34. С. 1563–1608;
Kosyakov B. P. On the Inert Properties of Particles in Classical Theory // Phys. Part. Nucl. 2003. V. 34. P. 808–828; arXiv:hep-th/0208035.
20. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics. New York: Willey, 1962; 2nd ed. 1975; 3rd ed. 1999;
Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
21. *Wong S. K.* Field and Particle Equation for the Classical Yang–Mills Field and Particles with Isotopic Spin // Nuovo Cim. A. 1970. V. 65. P. 689–694.
22. *Yang C. N.*, *Mills R.* Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 191–195.
23. *Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.* Gravitation. San Francisco: Freeman, 1973;
Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 1. М.: Мир, 1977.

24. *Nordström G.* Träge und schwere Masse in der Relativitätsmechanik // Ann. Phys. 1913. V. 40. P. 856–878; Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzip // Ibid. 1913. V. 42. P. 533–554.
25. *Александров А. Д., Овчинникова В. В.* Замечания к основам теории относительности // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., физ., хим. 1947. Т. 11. С. 95–110;
Александров А. Д. Избр. тр. Т. 1. Геометрия и приложения. Новосибирск: Наука, 2006. С. 288–306.
26. *Taub A. H.* Orbits of Charged Particles in Constant Fields // Phys. Rev. 1948. V. 73. P. 786–798.
27. *Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleihungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. reine angew. Math. 1858. V. 55. P. 25–55.
28. *Born M., Infeld L.* Foundations of the New Field Theory // Proc. Roy. Soc. A. 1934. V. 144. P. 425–451.
29. *Fradkin E. S., Tseytlin A. A.* Non-Linear Electrodynamics from Quantized Strings // Phys. Lett. B. 1985. V. 163. P. 123–130.
30. *Bateman H.* The Conformal Transformations of a Space of Four Dimensions and Their Applications to Geometrical Optics // Proc. London Math. Soc. 1909. V. 7. P. 70–89; The Transformation of the Electrodynamical Equations // Proc. London Math. Soc. 1910. V. 8. P. 223–264.
31. *Cunningham E.* The Principle of Relativity in Electrodynamics and an Extension Thereof // Proc. London Math. Soc. 1909. V. 8. P. 77–98.
32. *Ибрагимов Н. Х.* Групповые свойства волновых уравнений для частиц с нулевой массой // ДАН. Сер. мат. физ. 1968. Т. 178. С. 566–568;
33. *Heaviside O.* Electrical Papers. V. I and II. London: Macmillan, 1892.
34. *Larmor J.* Aether and Matter. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1900.
35. *Rainich G. Y.* Electrodynamics in General Relativity // Trans. Am. Math. Soc. 1925. V. 27. P. 106–136.
36. *Białynicki-Birula I.* Nonlinear Electrodynamics: Variations on a Theme by Born and Infeld // Quantum Theory of Particles and Fields. Birthday Volume Dedicated to Jan Łopuszański / Ed. B. Jancewicz and J. Lukierski. Singapore: World Sci., 1983. P. 31–48.
37. *Weyl H.* Raum, Zeit, Materie. Berlin: Springer, 1918;
Вейль Г. Пространство, время, материя. М.: Янус, 1996.
38. *Bandos I., Lechner K., Sorokin D., Townsend P. K.* A Non-Linear Duality-Invariant Conformal Extension of Maxwell's Equations // Phys. Rev. D. 2020. V. 102. P. 121703; arXiv:hep-th/2007.09092.
39. *Kosyakov B. P.* Nonlinear Electrodynamics with the Maximum Allowable Symmetries // Phys. Lett. B. 2020. V. 810. P. 135840; arXiv:hep-th/2007.13878.
40. *Dirac P. A. M.* Quantised Singularities in the Electromagnetic Field // Proc. Roy. Soc. A. 1931. V. 133. P. 60–72.
41. *Dirac P. A. M.* The Theory of Magnetic Poles // Phys. Rev. 2nd Ser. 1948. V. 74. P. 817–830.
42. *Wu T. T., Yang C. N.* Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields // Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 3845–3857.
43. *Coleman S.* The Magnetic Monopole Fifty Years Later // The Unity of the Fundamental Interactions / Ed. by A. Zichichi. London: Plenum, 1983. P. 21–117;
Коулмен С. Магнитный монополь пятьдесят лет спустя // УФН. 1984. Т. 144. С. 277–340.

44. *Poincaré H.* Remarques sur une expérience de M. Birkeland // Compt. Rend. 1896. V. 123. P. 530–533;
Oeuvres. T. 10. Paris: Gauthier–Villars, 1954. P. 310–313.
45. *Goddard P., Olive D. I.* Magnetic Monopoles in Gauge Field Theories // Rep. Prog. Phys. 1978. V. 41. P. 1357–1437.
46. *Chubykalo A. E., Espinoza A., Kosyakov B. P.* The Origin of the Energy-Momentum Conservation Law // Ann. Phys. 2017. V. 384. P. 85–104; arXiv:hep-th/1704.08123.
47. *Abraham M.* Theorie der Elektrizität. V. II. Leipzig: Teubner, 1905.
48. *Lorentz H. A.* The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat. Leipzig: Teubner, 1909.
49. *Dirac P. A. M.* Classical Theory of Radiating Electron // Proc. Roy. Soc. A. 1938. V. 167. P. 148–169.
50. *Косяков Б. П.* Излучение в электродинамике и теории Янга–Миллса // УФН. 1992. Т. 162. С. 161–176;
Kosyakov B. P. Radiation in Electrodynamics and Yang–Mills Theory // Sov. Phys. Usp. 1992. V. 35. P. 135–142.
51. *Косяков Б. П.* Точные решения в классической электродинамике и теории Янга–Миллса–Вонга в четномерном пространстве-времени // ТМФ. 1999. Т. 119. С. 119–135;
Kosyakov B. P. Exact Solutions in Classical Electrodynamics and Yang–Mills Theory in Even-Dimensional Space-Times // Theor. Math. Phys. 1999. V. 119. P. 493–505; arXiv:hep-th/0207217.
52. *Kosyakov B. P.* Electromagnetic Radiation in Even-Dimensional Spacetimes // Intern. J. Mod. Phys. A. 2008. V. 23. P. 4695–4708; arXiv:hep-th/0803.3304.
53. *Kosyakov B. P.* Self-Interaction in Classical Gauge Theories and Gravitation // Phys. Rep. 2019. V. 812. P. 1–56; arXiv:hep-th/1812.03290.
54. *Teitelboim C.* Splitting of Maxwell Tensor: Radiation Reaction without Advanced Fields // Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 1572–1582.
55. *Larmor J.* On the Theory of Magnetic Influence on Spectra; and on the Radiation from Moving Ions // Phil. Mag. 1897. V. 44. P. 503–512.
56. *Heaviside O.* The Waste of Energy from a Moving Electron // Nature. 1902. V. 67. P. 6–8.
57. *Kosyakov B. P.* Exact Solutions in the Yang–Mills–Wong Theory // Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 5032–5048; arXiv:hep-th/9902039.
58. *Planck M.* Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik // Phys. Z. 1908. V. 9. P. 828–830.
59. *Kant I.* Kritik der reinen Vernunft. Riga: Hartknoch, 1781;
Кант И. Критика чистого разума / Пер. с нем. Н. Лосского. М.: Эксмо, 2007.
60. *Marx K.* Grundrisse der Kritik der politischen Ökonomie (Rohentwurf) // Neue Zeit. 1903. V. 1. No. 23–35;
Маркс К. Экономические рукописи 1857–1859 годов. Введение / Собр. соч. Изд. 2-е. Т. 12. М.: Политиздат, 1958. С. 879.
61. *Fokker A. D.* Ein invarianter Variationssatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen // Z. Phys. 1929. V. 58. P. 386–393.
62. *Wheeler J. A., Feynman R. P.* Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation // Rev. Mod. Phys. 1945. V. 17. P. 157–181.
63. *Wheeler J. A., Feynman R. P.* Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 425–433.

64. *Hoyle F., Narlikar J. V.* Cosmology and Action-at-a-Distance Electrodynamics // Rev. Mod. Phys. 1995. V. 67. P. 113–155.
65. *Ryder L. H.* Conformal Invariance and Action-at-a-Distance Electrodynamics // J. Phys. A. 1974. V. 7. P. 1817–1828.
66. *Boulware D. G., Brown L. S., Peccei R. D.* Deep-Inelastic Electroproduction and Conformal Symmetry // Phys. Rev. D. 1970. V. 2. P. 293–298.
67. *Pegg D. T.* Absorber Theory of Radiation // Rep. Prog. Phys. 1975. V. 38. P. 1339–1383.
68. *Schweber S. S.* An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. New York: Row, 1964. Ch. 13; Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. Гл. 13.
69. *Feynman R. P.* The Development of the Space-Time View of Quantum Mechanics. Nobel Lecture // Science. 1966. V. 153. P. 699–708;
Фейнман Р. В поисках новых законов. Нобелевская лекция. Разработка квантовой электродинамики. Характер физических законов. М.: Мир, 1968. С. 161–231.
70. *Feynman R. P., Hibbs A. R.* Quantum Mechanics and Path Integrals. New York: McGraw-Hill, 1965;
Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
71. *Brink L., Deser S., Zumino B., Di Vecchia P., Howe P.* Local Supersymmetry for Spinning Particles // Phys. Lett. B. 1976. V. 64. P. 435–438.
72. *Wick G. C.* Properties of Bethe–Salpeter Wave Functions // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 1124–1134.
73. *Glimm J., Jaffe A.* Quantum Physics. A Functional Integral Point of View. Berlin: Springer, 1981;
Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. М.: Мир, 1984.
74. *Kosyakov B. P.* Black Holes: Interfacing the Classical and the Quantum // Found. Phys. 2008. V. 38. P. 678–694; arXiv:gr-qc/0707.2749.
75. *Streater R. F., Wightman A. S.* PCT, Spin and Statistics and All That. New York: Benjamin, 1964;
Стритер Р., Вайтман А. С. PCT, спин и статистика и все такое. М.: Наука, 1966.
76. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987;
Bogolubov N. N., *Logunov A. A.*, *Oksak A. I.*, *Todorov I. T.* General Principles of Quantum Field Theory. Dordrecht: Kluwer, 1990.
77. *Haag R.* Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras. 2nd ed. Berlin: Springer, 1996.
78. *Блохинцев Д. И.* Принципиальные вопросы квантовой механики. Дубна, 1965;
Blokhintsev D. I. The Philosophy of Quantum Mechanics. Dordrecht: Reidel, 1968.
79. *Freedman M.* The Topology of Four-Dimensional Manifolds // J. Diff. Geom. 1982. V. 17. P. 357–453.
80. *Donaldson S.* An Application of Gauge Theory to Four-Dimensional Topology // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 279–315.
81. *Gompf R. E., Stipsicz A. I.* 4-Manifolds and Kirby Calculus. Providence: Am. Math. Soc., 1999;

Гомпф Р., Штипшиц А. Четырехмерные многообразия и исчисление Кирби. М.: МЦНМО, 2013.
82. *Scorpan A.* The Wild Word of 4-Manifolds. Providence: Am. Math. Soc., 2005; *Скорпан А.* Удивительный мир четырехмерных многообразий. М.: МЦНМО, 2016.
83. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen. 1918. V. 2. P. 235–258.
84. *Poincaré H.* La science et l'hypothèse. Paris: Flammarion, 1952; *Пуанкаре А.* Наука и гипотеза // О науке. М.: Наука, 1983.
85. *Rosen N.* General Relativity and Flat Space. I; II // Phys. Rev. 1940. V. 15. P. 147–150, and P. 150–153.
86. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2006.
87. *Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.* Canonical Variables for General Relativity // Phys. Rev. 1960. V. 117. P. 1595–1602; Energy and the Criteria for Radiation in General Relativity // Ibid. V. 118. P. 1100–1104; Coordinate Invariance and Energy Expressions in General Relativity // Ibid. V. 122. P. 997–1006.
88. *Денисов В. И., Соловьев В. О.* Энергия, определяемая в ОТО на основе традиционного гамильтонова подхода, не имеет физического смысла // ТМФ. 1983. Т. 56. С. 301–314;
Denisov V. I., Solov'ev V. O. The Energy Determined in General Relativity on the Basis of the Traditional Hamilton Approach Does Not Have Physical Meaning // Theor. Math. Phys. 1983. V. 56. P. 832–841.
89. *Banach S., Tarski A.* Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes // Fund. Math. 1924. V. 6. P. 244–277.
90. *Wagon S.* The Banach–Tatski Paradox. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
91. *Klein F.* Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen // Math. Ann. 1893. V. 43. P. 63–100; Gesammelte Abh. V. 1. Berlin: Springer, 1921. P. 460–497.
92. *Killing W.* Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen // Math. Ann. 1888. V. 31. P. 252–290; V. 33. P. 1–48; 1889. V. 34. P. 57–122; 1890. V. 36. P. 161–189.
93. *Cartan É.* Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Oeuvres complètes. Paris, 1894. V. 1. P. 137–287.
94. *Weyl H.* The Structure and Representations of Continuous Groups. Lecture Notes. Princeton: Princeton Univ. Press, 1935.
95. *Barut A. O., Rączka R.* Theory of Group Representations and Applications. Warszawa: PWN–Polish Sci. Publ., 1977; 2nd ed. 1980;
Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1980.
96. *Green M. B., Schwarz J. H., Witten E.* Superstring Theory. V. 1, 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987;
Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
97. *Polchinski J.* String Duality // Rev. Mod. Phys. 1996. V. 68. P. 1245–1258; arXiv:hep-th/9607050.
98. *Березин Ф. А., Кац Г. И.* Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами // Мат. сб. 1970. Т. 82. С. 343–359;
Berezin F. A., Kats G. I. Lie Groups with Commuting and Anticommuting Parameters // Math. USSR Sb. 1970. V. 11. P. 311–325.

99. *Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.* Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P-инвариантности // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 452–455;
Gol'fand Yu. A., Likhtman E. P. Extension of the Algebra of Poincaré Group Generators and Violation of P-Invariance // JETP Lett. 1971. V. 13. P. 323–326.
100. *Neveu A., Schwarz J. H.* Factorizable Dual Model of Pions // Nucl. Phys. B. 1971. V. 31. P. 86–112.
101. *Gervais J.-L., Sakita B.* Field Theory Interpretation of Supergauges in Dual Models // Nucl. Phys. B. 1971. V. 34. P. 632–639.
102. *Ramond P.* Dual Theory for Free Fermions // Phys. Rev. D. 1971. V. 3. P. 2415–2418.