

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В СИНТЕТИЧЕСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

П. К. Батраков<sup>a, 1</sup>, В. О. Юрьевский<sup>b, 2</sup>, И. А. Кудряшов<sup>a, 3</sup>

<sup>a</sup> Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup> Физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>a</sup> Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скobelьцына  
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе представлена теоретическая модель, описывающая спектры мощности синхротронного излучения релятивистских электронов в синтетическом турбулентном магнитном поле. Проведен численный расчет полных спектров мощности синхротронного излучения в турбулентном поле, сгенерированном гармоническим методом, а также построена модельная картина неба, демонстрирующая структуру пространственной неоднородности распределения мощности синхротронного излучения для наблюдателя. Для анализа угловой структуры применены вейвлет-анализ и мультипольное разложение по сферическим гармоникам. Результаты подтверждают эффективность подхода для исследования структуры магнитного поля в экспериментальных данных.

The work presents a theoretical model describing the power spectra of synchrotron radiation from relativistic electrons in a synthetic turbulent magnetic field. A numerical calculation of the full synchrotron radiation power spectra was performed in a turbulent field generated using the harmonic method. Additionally, a model sky map was constructed, demonstrating the spatial inhomogeneity of the synchrotron radiation power distribution as seen by an observer. Wavelet analysis and multipole decomposition using spherical harmonics were applied to analyze the angular structure. The results confirm the effectiveness of the approach for studying the magnetic field structure and the distribution of cosmic rays in experimental data.

PACS: 29.20.Lq; 96.50.S—

---

<sup>1</sup>E-mail: p.batrakov@lebedev.ru

<sup>2</sup>E-mail: yrovskyyvladimir@gmail.com

<sup>3</sup>E-mail: ilya.kudryashov.85@gmail.com

## ВВЕДЕНИЕ

Галактические космические лучи (ГКЛ) являются потоком высокоэнергетических заряженных частиц с энергиями порядка  $10^6$ – $10^{18}$  эВ. Ключевой особенностью ГКЛ является нетепловое распределение их энергий. ГКЛ приобретают энергию путем ускорения в специфических астрофизических процессах плазменной и электромагнитной природы [1]. Изучение динамики галактических космических лучей является косвенным методом исследования магнитных полей Галактики, наравне с общеизвестными методами, такими как вращение плоскости поляризации и эффект Зеемана.

Основной целью работы является анализ поведения релятивистских частиц в структуре моделируемого турбулентного магнитного поля. В результате исследования была получена модельная карта распределения полной мощности излучения в неоднородном магнитном поле, построены спектры синхротронного излучения моделируемых частиц, рассчитан спектр полной мощности с использованием двумерного вейвлет-анализа, а также проведено мультипольное разложение по сферическим гармоникам.

## ПРИРОДА ГАЛАКТИЧЕСКИХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

Более 90 % частиц космических лучей (КЛ) составляют атомы водорода, на гелий приходится около 7 % и менее 1 % — на более тяжелые элементы, вклад электрон-позитронной компоненты падает с энергией и составляет 1 % при энергиях порядка ГэВ и 0,1 % при энергиях порядка нескольких тераэлектронвольт. Важно отметить, что завершенная и полная теория происхождения КЛ в настоящее время отсутствует. Законченная теория происхождения КЛ должна объяснить основные характеристики КЛ: степенную форму энергетического спектра, величину плотности энергии, химический состав первичных и вторичных КЛ, включая данные о потоках антипротонов, электронов, позитронов,  $\gamma$ -квантов, практическое постоянство во времени интенсивности КЛ и очень слабую их анизотропию.

Согласно современным представлениям электрон-позитронная компонента в КЛ рождается в процессах активности радиопульсаров и взрывов сверхновых (первичные КЛ), вторичная электрон-позитронная компонента рождается в процессах взаимодействия протонной компоненты КЛ с галактическим газом, вследствие чего происходит реакция рождения электронов и позитронов как одного из продуктов распада в цепочке  $p + X \rightarrow \pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \rightarrow e^\pm$ . Несмотря на низкую интенсивность транспорта электронов и позитронов в КЛ, изучение данной компоненты очень важно для построения самосогласованных моделей ускорения и транспорта КЛ [2].

## СИНХРОТРОННЫЙ СПЕКТР В ГКЛ

Релятивистские электроны в магнитном поле распространяются по винтовой траектории вдоль силовых линий. Частота обращения  $\omega_b$  частиц выражается отношением напряженности поля  $\mathbf{B}$  к релятивистскому  $\gamma$ -фактору  $\gamma = E/m_0c^2$ , а радиус орбиты (гиrorадиус)  $\mathbf{R}$  вычисляется с учетом скорости движения высокоенергетичных заряженных частиц  $v_e$ , их массы  $m_e$  и скорости света  $c$ :

$$\omega_b = \frac{e\mathbf{B}}{m_e c \gamma}, \quad (1)$$

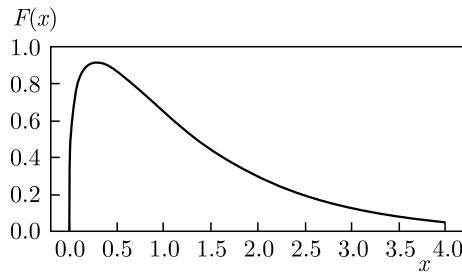


Рис. 1. Значения функции  $F(x)$ , полученные методом численного расчета, где  $x$  — отношение  $\omega/\omega_c$ , а  $F(x)$  описывается формулой (4)

$$\mathbf{R} = \frac{cv_e}{e\mathbf{B}}\gamma. \quad (2)$$

В процессе такого транспорта высокоэнергетичные электроны испытывают потери энергии на магнитотормозное (синхротронное) излучение. Спектр синхротронного излучения находится в диапазоне от радиоизлучения до мягкого рентгеновского излучения. Синхротронное излучение всегда направлено вдоль траектории движения высокоэнергетичных частиц в области угла раствора  $\theta = \arcsin 1/\gamma$ .

Спектральное распределение полной мощности синхротронного излучения  $\mathbf{P}(\omega)$  выражается с помощью функции Макдональда  $K_{5/3}(z)$  (модифицированной функции Бесселя 2-го рода), где критическая частота  $\omega_c$  зависит от питч-угла  $\alpha$  [3, 4]:

$$\omega_c = \frac{2}{3}\omega_b\gamma^3 \sin(\alpha) = \frac{3eB}{2m_ec}\gamma^2 \sin(\alpha), \quad (3)$$

где

$$F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(z) dz. \quad (4)$$

Спектральное распределение мощности полного (по всем направлениям) излучения заряженной частицы, движущейся в магнитном поле, представлено на рис. 1, где максимум приходится на  $\omega/\omega_c = 0,29$ .

## МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Двумерный вейвлет-анализ представляет собой метод разложения функции  $f(x, y)$  по базису локализованных функций, называемых вейвлетами, которые зависят от масштаба  $a$  и сдвигов  $b$ ,  $c$ . Основная идея заключается в том, чтобы проанализировать пространственно-частотную структуру сигнала, выявляя локальные особенности на разных уровнях разрешения. Непрерывное вейвлет-преобразование определяется следующей формулой [5]:

$$W(a, b, c) = \frac{1}{a^2} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \psi^* \left( \frac{x-b}{a}, \frac{y-c}{a} \right) dx dy, \quad (5)$$

где  $\psi(x, y)$  — анализирующий вейвлет;  $\psi^*$  — его комплексно-сопряженная функция. Нормирующий множитель  $1/a^2$  обеспечивает корректное масштабирование энергии при изменении масштаба. Благодаря использованию таких локализованных функций, вейвлет-анализ позволяет эффективно выделять детали изображения или сигнала как в пространственной, так и в частотной областях, что делает его полезным инструментом для обработки изображений, анализа сигналов, а также в задачах компьютерного зрения и научных исследований.

Для глобального описания угловой структуры используется разложение функции  $f(\theta, \phi)$  в сферические гармоники  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ , которые образуют полный ортонормированный базис на сфере [6]:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (6)$$

где коэффициенты разложения  $a_{\ell m}$  вычисляются как

$$a_{\ell m} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (7)$$

Каждое значение  $\ell$  характеризует определенный угловой масштаб: низкие  $\ell$  описывают крупномасштабные компоненты (монополь, диполь, квадруполь), в то время как большие  $\ell$  соответствуют мелкомасштабным флуктуациям.

Для количественной оценки вклада различных масштабов в общее распределение используется спектр мощности [6]:

$$C_{\ell} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2, \quad (8)$$

который описывает среднюю амплитуду флуктуаций на уровне  $\ell$ . Зависимость  $C_{\ell}$  от  $\ell$  позволяет выделить доминирующие масштабные компоненты в структуре поля.

Совместное применение вейвлет-анализа и мультипольного разложения обеспечивает как локализованную, так и глобальную характеристику исследуемого поля, позволяя получить полное представление о его структуре.

## ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Основной целью исследования является создание модели, предсказывающей пространственный спектр неоднородностей синхротронного излучения электронов ГКЛ. Первой частью работы стало создание модели магнитного поля, имитирующего реальное соотношение турбулентной и регулярной компонент магнитного поля Галактики. Реализация магнитного поля была выполнена с помощью гармонического метода.

Данный метод позволяет сгенерировать магнитное поле  $\mathbf{B}$  в произвольных точках пространства, имеющих радиусы-векторы  $\mathbf{r}$ , за счет суперпозиции  $N$  плоских волн со случайными амплитудами  $A_n$ , фазами  $\phi$  и поляризациями  $\mathbf{p}(n)$ :

$$\mathbf{B}(\vec{r}) = \sum_{i=0}^N A_n p_n \cos(\vec{r} \cdot \vec{k}_n + \phi_n). \quad (9)$$

Генерация  $A_n$ ,  $\phi$ ,  $\mathbf{p}(n)$  была реализована с помощью метода Монте-Карло [7]. Магнитное поле, полученное таким образом, называется синтетическим, данный подход для генерации магнитного поля является классическим методом в задачах изучения диффузии космических лучей в турбулентных магнитных полях и подробно разобран в работе [8]. Для моделирования турбулентных свойств магнитного поля использовался колмогоровский спектр, согласно которому энергия распределяется по волновым числам как

$$E(k) \propto k^x, \quad (10)$$

где  $x = -5/3$ , что характерно для развитой турбулентности в жидкости и плазме. Минимальные и максимальные масштабы выбраны как  $l_{\min} = 100$  а. е. и  $l_{\max} = 100$  пк.

Второй частью работы стал расчет спектров синхротронного излучения модельных частиц, полученных в синтетических магнитных полях. Как было сказано выше, в рамках данного исследования первостепенный интерес вызывали релятивистские электроны. Наблюдение пространственных неоднородностей синхротронного излучения позволит осуществить поиск неоднородных структур в магнитном поле Галактики и произвести анализ поведения высокоэнергичных заряженных частиц, находящихся в обнаруженных неоднородных структурах.

С Земли синхротронное излучение может наблюдаться в ограниченном интервале частот от 10 МГц до 10 ГГц. Первая граница обусловлена поглощением радиоизлучения в земной ионосфере, а вторая — только чувствительностью полноповоротных параболоидов в условиях флюктуаций яркости неба [2].

В данной работе был проведен анализ зависимости формы полного спектра мощности  $P(\omega)$  от вариации различных значений величины магнитного поля  $\mathbf{B}$  и питч-угла  $\alpha$  (угол между вектором скорости движения заряженной частицы и направлением магнитного поля) с целью идентификации смещения спектрального пика полной мощности в зависимости от вклада различных пространственных областей (рис. 2 и 3).

Построенные спектры демонстрируют увеличение полной мощности излучения в радиоокне при увеличении питч-угла, а также хорошо видимое смещение при росте величины локального магнитного поля в точке излучения. Такое поведение спектра

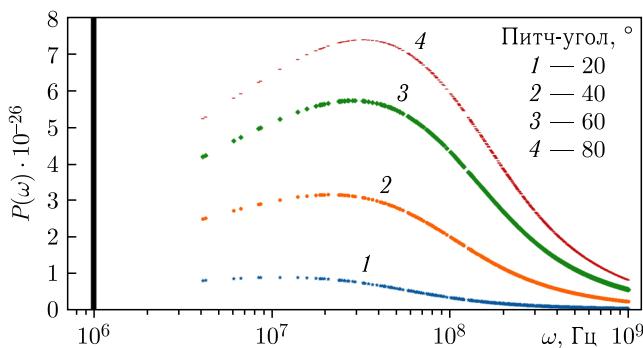


Рис. 2. Спектры полной мощности излучения в зависимости от питч-угла  $\alpha$ . Чёрная линия является границей радиоокна

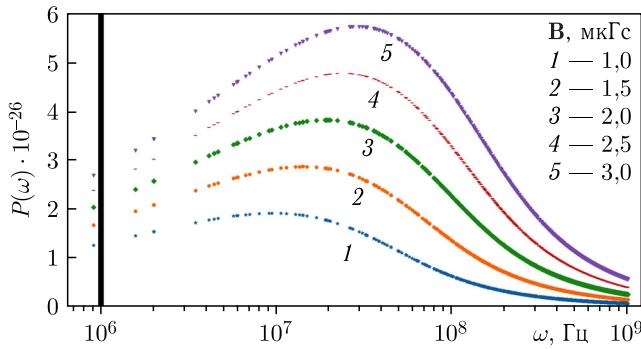


Рис. 3. Спектры полной мощности излучения в зависимости от величины магнитного поля  $B$ . Черная линия является границей радиоокна

дает нам понимание о вкладах локальных параметров пространственной неоднородности в общий спектр полной мощности.

Далее была сгенерирована модельная картина синхротронного фона неба в радиоокне с произвольной точкой отсчета угловых координат, содержащая полные спектры мощности в произвольных точках пространства в синтетическом магнитном поле. Идея данной модели заключается в изотропной генерации  $N$  точечных источников синхротронного излучения. В каждом таком источнике постулируется изотропный поток релятивистских электронов, нормированный на единицу, с учетом распределения  $\gamma$ -факторов по степенному закону. Расчет синхротронных потерь производился с учетом угла между линией визирования на точку и направлением поля в данной точке пространства, а также значением величины магнитного поля. Вычисление полного спектра мощности в каждой точке осуществлялось с помощью формулы (7), проинтегрированной по  $\gamma$ -факторам, с учетом нормировочного энергетического коэффициента  $(\gamma_0/\gamma)^\delta$ ,

$$P(\omega) = f(B, \sin(\alpha)) \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)^\delta F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) d\gamma, \quad (11)$$

где

$$f(B, \sin(\alpha)) = \frac{\sqrt{3} e^3 B \sin(\alpha)}{2\pi mc^2}. \quad (12)$$

Здесь  $\delta$  является спектральным индексом электронов в ГКЛ в энергетическом диапазоне  $\gamma_{\min} = 1600$ ,  $\gamma_{\max} = 52\,000$ , что соответствует энергетическому диапазону, дающему существенный вклад в радиоокно [2]. Спектральный индекс был получен с помощью аппроксимации экспериментальных данных CRDB [9].

На рис. 4 представлено изображение проекции трехмерного пространства на двумерную развертку небесной сферы в формате гистограммы, где каждый бин содержит сумму полных мощностей синхротронного излучения в произвольных точках пространства.

Построенное в рамках нашей модели изображение показывает, что в разных областях пространства есть заметные структуры с разной силой излучения. Это связано с особенностями магнитного поля в этих областях.

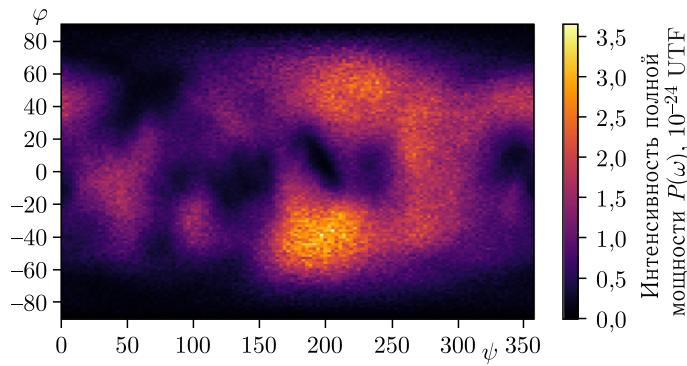


Рис. 4. Рассчитанная интенсивность синхротронных потерь электронов в синтетическом магнитном поле в полярных координатах, наблюдаемая из центра генерируемого объема

Завершающим этапом исследования стала демонстрация разработанного метода расчета излучения и определения характерных размеров пространственных неоднородностей. Был сгенерирован модельный объем пространства радиусом 100 пк, рассчитанное излучение которого было спроектировано на двумерную картину неба, наблюданную из центра сферы. Для количественной оценки характерных масштабов пространственной неоднородности были применены два независимых метода.

Во-первых, было проведено мультипольное разложение результирующего поля на синтетической карте небесной сферы, что позволило вычислить спектр мощности  $C_l$ , характеризующий вклад различных угловых масштабов  $\ell$  в общее распределение излучения (рис. 5). Анализ спектра мультипольного разложения показал, что при малых значениях  $\ell$  присутствует значительный вклад структур, в то время как с увеличением угловых масштабов вклад мощности в общий спектр стремится к нулю. Такое поведение спектра может указывать на наличие крупномасштабных пространственно-неоднородных структур в синтетическом изображении синхротронного излучения.

Во-вторых, был реализован метод изотропного вейвлет-анализа изображения, который позволил локализовать и количественно оценить энергетический вклад струк-

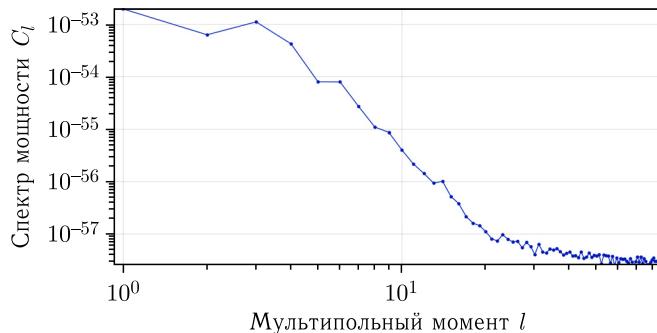


Рис. 5. Спектр мультипольного разложения синтетической карты неба, представленной на рис. 4

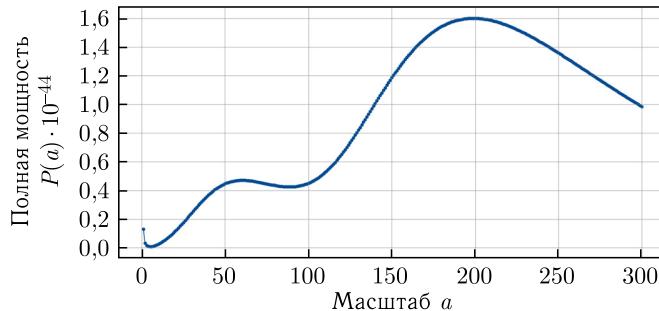


Рис. 6. Спектр полной мощности синтетической карты неба, представленной на рис. 4

тур на различных масштабах (см. рис. 5). Для анализа изображения использовался вейвлет «мексиканская шляпа», заданный следующей формулой [6]:

$$\psi(x, y) = \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right), \quad (13)$$

где  $a$  — параметр, определяющий масштаб вейвлета.

Для оценки энергетического вклада структур, сгенерированных в рамках данной реализации синтетического магнитного поля, на различных масштабах анализировалась полная мощность (рис. 6), которая определяется как интеграл квадрата модуля вейвлет-преобразования  $W(a, b, c)$  по всем сдвигам  $b$  и  $c$ :

$$P(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W(a, b, c)|^2 db dc. \quad (14)$$

Полная мощность позволяет оценить распределение энергии в изображении на разных уровнях детализации.

Результатом применения данного метода стало выделение локализованных особенностей на различных масштабах изображения (см. рис. 3), что позволило более точно оценить структуру, наблюдаемую на синтетической картине синхротронного излучения, а также выявить важные пространственные особенности. На масштабах  $a = 58$  и  $a = 199$  наблюдаются выраженные максимумы, что может указывать на наличие устойчивых структур в синтетической картине. В области масштаба  $a = 90$  отмечается локальный минимум, который, вероятно, отражает переходный момент между крупной и мелкомасштабной структурой.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе реализована методика моделирования и анализа пространственных неоднородностей синхротронного излучения, возникающего при изотропном распределении релятивистских электронов в синтетическом турбулентном магнитном поле. Разработанный численный подход, основанный на гармоническом методе генерации поля и вычислении полной спектральной мощности излучения с учетом

энергетического распределения частиц, позволил получить синтетическую карту неба и выявить характерные пространственные особенности излучения.

Применение мультипольного разложения и вейвлет-анализа показало наличие как крупномасштабных, так и мелкомасштабных структур, обусловленных свойствами магнитного поля. Такие результаты указывают на потенциал предлагаемого подхода для диагностики неоднородностей магнитного поля Галактики в экспериментальных данных.

В дальнейшем метод может быть расширен за счет учета регулярной составляющей магнитного поля и использован для построения более полной модели распределения радиоизлучения ГКЛ в объеме Галактики. Это открывает возможности для интерпретации наблюдаемых радиоданных и реконструкции структуры галактических магнитных полей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калмыков Н. Н., Куликов Г. В., Роганова Т. М. Галактические космические лучи. Модель космоса. М.: Изд-во КДУ, 2007. Т. 1. С. 62.
2. Багров В. Г., Бисноватый-Коган Г. С., Бордовицын В. А., Борисов А. В. Теория излучения релятивистских частиц / Под ред. В. А. Бордовицына. М.: Физматлит, 2002. 576 с.
3. Ландау Л. Д., Лишинец Е. М. Теория поля. Теоретическая физика. М.: Наука, 1974.
4. Лонгейр М. Астрофизика высоких энергий: Пер. с англ. М.: Мир, 1983.
5. Frick P. G., Sokoloff D. D., Stepanov R. A. Wavelets for the Space-Time Structure Analysis of Physical Fields // Phys. Usp. 2022. V. 65. P. 62.
6. Джексон Д. Классическая электродинамика / Под ред. Э. Л. Бурштейна. М.: Мир, 1965.
7. Yurovsky Y. O., Kudryashov I. A. Anisotropic Cosmic Ray Diffusion Tensor in a Numerical Experiment // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 87, Iss. 7. P. 1032–1034.
8. Tautz C., Dosch A. // Phys. Plasmas. 2013. V. 20, No. 2. P. 022302.
9. Cosmic-Ray Data Base (CRDB). <https://lpsc.in2p3.fr/crdb/>. 2013.

Получено 15 мая 2025 г.