

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В КВАНТОВОЙ И ГРАВИТАЦИОННОЙ ФИЗИКЕ

Д. А. Славнов *

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Описана схема построения квантовой механики, в которой гильбертово пространство и линейные операторы не являются первичными элементами теории. Вместо этого рассматривается некоторый вариант алгебраического подхода. В качестве первичных составляющих используются элементы некоммутативной алгебры (наблюдаемые) и функционалы на этой алгебре (элементарные состояния), которые ассоциируются с результатами единичных измерений. Такая схема позволяет, с одной стороны, использовать аппарат классической (колмогоровской) теории вероятностей, а с другой стороны, воспроизвести стандартный математический аппарат квантовой механики и указать границы его применимости.

We describe the scheme of quantum mechanics, in which the Hilbert space and linear operators are not primary notions of the theory. Instead of this we consider some variant of the algebraic approach. As primary notions we use elements of the noncommutative algebra (observable) and functionals on this algebra (elementary states), which we associate with results of individual measurements. Such a scheme allows us to use, on the one hand, the apparatus of classical (Kolmogorov's) probability theory, and on the other hand, to reproduce the standard mathematical apparatus of quantum mechanics and to specify borders of its applicability.

PACS: 03.65.Ud

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия квантовая теория поля достигла значительных успехов. Эти успехи связаны с созданием неабелевых (некоммутативных) калибровочных моделей. На их основе возникла новейшая кварковая физика. Абелева калибровочная модель, квантовая электродинамика, была известна давно. Переход к неабелевым моделям стал качественным скачком в развитии квантовой теории поля.

* E-mail: slavnov@theory.sinp.msu.ru

Вместе с тем этот переход не повлек за собой сколько-нибудь существенного пересмотра основных концепций квантовой теории поля. Тем более он не потребовал каких-либо изменений в логике и математике.

В данной работе будет использоваться идея, что переход от классической физики к квантовой подобен переходу от абелевых калибровочных моделей к неабелевым. Конечно, квантовая физика — это качественно новая теория. Однако для успешного развития квантовой теории совсем не обязательно отказываться от основных концепций классической теории: формальной логики, классической теории вероятностей, принципа причинности, представления об объективной физической реальности, или, как говорят философы, от классической парадигмы. Обычно считается, что классическая парадигма несовместима с математическим аппаратом, принятым в квантовой механике. Здесь будет доказываться обратное.

Базовыми понятиями современного стандартного подхода к квантовой механике являются гильбертово пространство и линейные операторы в этом пространстве. Математически четко квантовую механику на основе этих понятий сформулировал фон Нейман. Матричная механика Гейзенберга и волновая механика Шредингера являются конкретными представлениями абстрактного метода гильбертова пространства фон Неймана.

Аппарат гильбертова пространства стал математической основой тех огромных успехов, которых достигла квантовая механика. Однако у этих успехов имеется и обратная сторона. Произошла некоторая фетишизация гильбертова пространства. Физики перестали обращать внимание на то, что гильбертово пространство — весьма специфический математический объект. Он оказался прекрасной основой для вычисления средних значений наблюдаемых величин и их вероятностных распределений. Вместе с тем мысль, что наблюдаемые — это операторы в гильбертовом пространстве, отнюдь не самоочевидна.

Попытки использовать аппарат гильбертова пространства для описания одиночных физических явлений далеко не так успешны. Рассуждения, которые при этом используются, часто оказываются небесспорными.

Так, чтобы согласовать концепцию гильбертова пространства с результатами одиночных измерений, фон Нейман прибегает к весьма сомнительной идее о «внутреннем Я». Отказ от принципа причинности также воспринимается с большим трудом.

То же самое относится к получившему широкое распространение представлению об определяющем влиянии наблюдателя на квантово-механические процессы. При этом уже не очень удивляет то, что в этом отношении квантовая механика оказалась уникальным разделом не только физики, но и науки вообще. Выдвигаются идеи об активной роли сознания в квантовой механике.

Все это указывает на то, что, хотя гильбертово пространство весьма полезный математический объект, его базовая роль совсем не бесспорна. Мысль о том, что гильбертово пространство и линейные операторы не

должны быть первичными элементами квантовой теории, не является новой. Именно эта идея стала основой алгебраического подхода к квантовой теории. Развитию этой идеи посвящено все содержание данного обзора.

1. АКСИОМЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТУИЦИЯ

Создание квантовой теории произвело революционный переворот в физике. Это утверждение давно стало банальностью, но от этого не перестало быть справедливым. Действительно, в рамках квантовой физики удалось количественно описать огромное количество явлений, которые описанию в рамках классической физики не поддавались. На основе квантовой физики развилось огромное количество новых технологий.

Однако, как всякая революция, квантовая революция имела не только положительные, но и отрицательные последствия. В физике как-то незаметно произошла подмена понятий. Под словами «дать объяснение какому-то явлению» в квантовой физике обычно подразумевают «дать математическое описание этого явления».

Такая подмена имеет вполне понятное происхождение. Современная квантовая физика строится как аксиоматическая теория, основывающаяся на *математических* аксиомах фон Неймана [1]. Эти аксиомы очень удобны для построения мощного математического аппарата. Вместе с тем их связь с нашими интуитивными представлениями практически полностью отсутствует. Как отмечено Сигалом [2], «эти аксиомы просты в техническом отношении, но интуитивно совершенно неясны и представляются возникшими *ad hoc*». Среди большинства физиков-теоретиков прочно утвердилось мнение, что в квантовой теории физическая интуиция, основанная на классических представлениях, бесполезна. Поэтому теория может строиться на основании более или менее произвольного набора математических аксиом. Лишь бы они были внутренне не противоречивы, и их *следствия* хорошо количественно описывали достаточно широкий круг экспериментальных результатов. Таким образом, одним из последствий квантовой революции стала замена объяснения физического явления его математическим описанием.

Современная стандартная квантовая механика основывается на постулатах:

I. Состояние физической системы описывается вектором $|\Psi\rangle$ некоторого гильбертова пространства или статистическим оператором (матрицей плотности) в этом пространстве.

II. Наблюдаемые \hat{D} системы описываются самосопряженными операторами \hat{D} .

III. Среднее значение наблюдаемой \hat{D} в состоянии $|\Psi\rangle$ равно математическому ожиданию $\langle\Psi|\hat{D}|\Psi\rangle$.

Почему гильбертово пространство имеет какое-то отношение к состоянию физической системы, почему оператор \hat{D} соответствует наблюдаемой \hat{D} , наконец, почему среднее значение наблюдаемой равняется $\langle \Psi | \hat{D} | \Psi \rangle$. Все эти вопросы считаются неуместными.

В стандартном подходе к квантовой механике восторжествовал лозунг «Победителей не судят!». Огромное количество прекрасных результатов, полученных на основании этих постулатов, позволяет со спокойной совестью отмахнуться от неуместных «почему».

Тем не менее в глубине души какой-то червь сомнения шевелится. С другой стороны, не могут же быть случайностью такие прекрасные результаты. А может быть, утверждения I–III не нужно принимать в качестве первичных постулатов, может быть, они следуют из более фундаментальных положений, которые более непосредственно связаны с физикой?

Если это так, то появляется надежда выявить условия, при которых утверждения I–III справедливы, иными словами, установить границы применимости стандартной квантовой механики. В свою очередь, это может помочь положить конец спорам о квантовых парадоксах, которые будоражат физическое сообщество почти с самого зарождения квантовой механики.

Постулаты I–III имеют еще один существенный недостаток. Они разрывают связь квантовой физики с классической. В последней состоянии и наблюдаемые описываются с помощью совершенно других математических понятий. Вообще, связь классической физики с квантовой оказывается какой-то странной. С одной стороны, классическая физика считается предельным случаем квантовой, т. е. классическая физика — это вторичная теория. С другой стороны, для формулировки основных положений квантовой физики требуется представление о взаимодействии квантового объекта с прибором, который описывается с помощью классической физики [3]. В логике такая ситуация хорошо известна и называется порочным кругом. В качестве выхода из этой ситуации делается утверждение, что классическая логика в квантовой физике не действует, а там требуется специальная квантовая логика.

Таким образом, квантовая теория подразумевает еще революционный переворот в логике. Однако, в отличие от физики, здесь существенных положительных результатов от такого переворота наблюдается мало. Кроме того, квантовая логика как некая последовательная полная схема не создана. Отдельные сформулированные утверждения фактически являются некоторой переформулировкой постулатов I–III или следствий из них. Недаром подавляющее большинство реально практикующих физиков не ссылаются на утверждения квантовой логики, а предпочитают обращаться непосредственно к постулатам I–III.

В стандартной формулировке квантовой механики имеется еще один неприятный момент. Квантовая механика по своей сути — это ста-

тистическая теория. Поэтому она должна основываться на теории вероятностей. Теория вероятностей (в формулировке Колмогорова [4]) в настоящий момент — это вполне сформировавшийся раздел математики. Однако считается, что такая теория вероятностей непригодна для квантовой механики и требуется специальная квантовая теория вероятностей. То есть квантовая теория требует еще революционного переворота в математике. Здесь также особых положительных результатов не достигнуто. Сформулированы только отдельные утверждения этой новой теории вероятностей, опять-таки фактически сводящиеся к постулатам I–III (см., например, [5]).

Таким образом, наблюдается разрыв квантовой теории с математикой, которая остается в традиционном русле классической логики и классической теории вероятностей. Из сказанного следует, что было бы крайне желательно построить теоретико-математическую схему, которая была бы пригодна как для классической, так и для квантовой физики. Было бы очень хорошо, если правила игры в этой схеме, или, как говорят философы — парадигма, будут классическими. Под классической парадигмой здесь будет подразумеваться, прежде всего, классическая формальная логика и представление о наличии причинно-следственной связи как между физическими явлениями, так и между логическими утверждениями. Далее следует предположение о существовании физических реальностей, которые являются носителями причин физических явлений, кроме того, предположение о том, что вероятностные суждения подчиняются классической колмогоровской теории вероятностей.

Обычно считается, что все эти положения несовместимы с математической схемой, которая принята в квантовой механике. Здесь предпринята попытка доказать обратное. При этом мы не будем основываться на постулатах I–III, а используем алгебраический подход [6–8]. В рамках этого подхода оказывается возможным сформулировать аксиомы, которые, во-первых, более фундаментальны, чем постулаты I–III, а во-вторых, являются интуитивно гораздо более понятными [9–11].

Здесь, правда, придется преодолеть некоторый психологический барьер. Дело в том, что аппарат гильбертова пространства стал стандартным в квантовой механике. Поэтому он кажется интуитивно понятным. Но это привычка к определенному математическому аппарату, а не физическая интуиция. В противоположность этому аппарат теории алгебр гораздо менее привычен для большинства физиков. Поэтому утверждения, использующие язык теории алгебр, кажутся более сложными, чем утверждения, использующие язык теории гильбертова пространства. Хотя, как правило, алгебраические утверждения более элементарны. Чтобы помочь преодолеть этот психологический барьер, в следующем разделе будут приведены элементарные сведения из теории алгебр.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГЕБР

Определения и утверждения заимствованы из монографий [6, 12–15].

Определение 1. Множество \mathfrak{L} называется комплексным (действительным) линейным пространством, если:

- а) для любого комплексного (действительного) числа α и любого элемента $\widehat{U} \in \mathfrak{L}$ определен элемент $\alpha\widehat{U} \in \mathfrak{L}$;
- б) для любых двух элементов $\widehat{U}, \widehat{V} \in \mathfrak{L}$ определен элемент $\widehat{U} + \widehat{V} \in \mathfrak{L}$;
- в) операции а) и б) обладают обычными свойствами умножения и сложения соответственно.

Определение 2. Комплексное (действительное) линейное пространство \mathfrak{L} называется комплексной (действительной) алгеброй \mathfrak{A} , если для любых элементов $\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W} \in \mathfrak{A}$ определена операция умножения, обладающая свойствами:

- а) $\widehat{U}\widehat{V} \in \mathfrak{A}$;
- б) $(\widehat{U} + \widehat{V})\widehat{W} = \widehat{U}\widehat{W} + \widehat{V}\widehat{W}$, $\widehat{U}(\widehat{V} + \widehat{W}) = \widehat{U}\widehat{V} + \widehat{U}\widehat{W}$;
- в) $\alpha(\widehat{U}\widehat{V}) = (\alpha\widehat{U})\widehat{V} = \widehat{U}(\alpha\widehat{V})$.

Определение 3. Алгебра \mathfrak{A} называется ассоциативной, если для любых $\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W} \in \mathfrak{A}$ справедливо $\widehat{U}(\widehat{V}\widehat{W}) = (\widehat{U}\widehat{V})\widehat{W}$.

Определение 4. Алгебра \mathfrak{A} называется коммутативной, если для любых $\widehat{U}, \widehat{V} \in \mathfrak{A}$ справедливо $\widehat{U}\widehat{V} = \widehat{V}\widehat{U}$.

Примеры:

- а) множество всех действительных непрерывных ограниченных функций одного переменного является действительной алгеброй;
- б) множество всех комплексных непрерывных ограниченных функций одного переменного является комплексной алгеброй;
- в) множество ограниченных линейных операторов гильбертова пространства является комплексной алгеброй;
- г) множество взаимно коммутирующих ограниченных эрмитовых линейных операторов гильбертова пространства является действительной алгеброй;
- д) множество всех ограниченных эрмитовых линейных операторов гильбертова пространства не является алгеброй.

Определение 5. Отображение $\widehat{U} \rightarrow \widehat{U}^*$ комплексной алгебры \mathfrak{A} на себя ($\widehat{U}, \widehat{U}^* \in \mathfrak{A}$) называется инволюцией, если для любого комплексного числа α и всех $\widehat{U}, \widehat{V} \in \mathfrak{A}$ справедливо:

- а) $(\widehat{U} + \widehat{V})^* = \widehat{U}^* + \widehat{V}^*$;
- б) $(\alpha\widehat{U})^* = \alpha^*\widehat{U}^*$;
- в) $(\widehat{U}\widehat{V})^* = \widehat{V}^*\widehat{U}^*$;
- г) $\widehat{U}^{**} = \widehat{U}$.

Примеры:

а) если \mathfrak{A} — множество всех комплексных непрерывных ограниченных функций одного переменного, то операция комплексного сопряжения является инволюцией;

б) если \mathfrak{A} — множество всех ограниченных линейных операторов гильбертова пространства, то операция эрмитова сопряжения является инволюцией.

Определение 6. Комплексная алгебра, оснащенная операцией инволюции, называется инволютивной алгеброй.

Замечание. В действительной коммутативной алгебре операцию инволюции можно определить как тождественное преобразование.

Определение 7. Если $\widehat{U}^* = \widehat{U}$ ($\widehat{U} \in \mathfrak{A}$), то элемент \widehat{U} называется эрмитовым.

Определение 8. Элемент $\widehat{I} \in \mathfrak{A}$ называется единицей алгебры, если для любого $\widehat{U} \in \mathfrak{A}$ справедливо $\widehat{IU} = \widehat{UI} = \widehat{U}$.

Утверждение 1. Любая алгебра либо содержит единицу, либо может быть дополнена элементом, обладающим свойствами единичного элемента.

Далее будут рассматриваться алгебры, в которых единица имеется.

Определение 9. Элемент $\widehat{U}^{-1} \in \mathfrak{A}$ называется обратным элементом \widehat{U} , если $\widehat{U}^{-1}\widehat{U} = \widehat{U}\widehat{U}^{-1} = \widehat{I}$.

Определение 10. Спектром $\sigma(\widehat{U}; \mathfrak{A})$ элемента \widehat{U} в алгебре \mathfrak{A} ($\widehat{U} \in \mathfrak{A}$) называется множество всех таких чисел λ , для которых элемент $\lambda\widehat{I} - \widehat{U}$ не имеет обратного в алгебре \mathfrak{A} .

Определение 11. Спектральным радиусом элемента \widehat{U} называется число $r = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(\widehat{U}; \mathfrak{A})\}$.

Определение 12. Подмножество \mathfrak{Q} алгебры \mathfrak{A} называется подалгеброй, если \mathfrak{Q} является алгеброй при том же определении операций сложения и умножения.

Определение 13. Пусть \mathfrak{Q} — действительная коммутативная подалгебра алгебры \mathfrak{A} . Подалгебра \mathfrak{Q} называется максимальной действительной коммутативной подалгеброй, если она не является подалгеброй никакой другой подобной подалгебры алгебры \mathfrak{A} .

В общем случае спектр $\sigma(\widehat{U}; \mathfrak{Q})$ элемента \widehat{U} в подалгебре \mathfrak{Q} может не совпадать со спектром $\sigma(\widehat{U}; \mathfrak{A})$ того же элемента в алгебре \mathfrak{A} . Однако справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Если \mathfrak{Q} — максимальная действительная коммутативная подалгебра алгебры \mathfrak{A} и $\widehat{U} \in \mathfrak{Q}$, то $\sigma(\widehat{U}; \mathfrak{Q}) = \sigma(\widehat{U}; \mathfrak{A})$.

Определение 14. Совокупность \mathfrak{J}_l элементов алгебры \mathfrak{A} называется ее левым идеалом, если:

а) $\mathfrak{J}_l \neq \mathfrak{A}$;

- б) \mathfrak{J}_l — линейное подпространство \mathfrak{A} ;
- в) из $\widehat{U} \in \mathfrak{J}_l$, $\widehat{V} \in \mathfrak{A}$ следует $\widehat{V}\widehat{U} \in \mathfrak{J}_l$.

Аналогично определяется правый идеал. Множество \mathfrak{J} элементов алгебры \mathfrak{A} , которое одновременно является левым и правым идеалом, называется двусторонним идеалом.

Определение 15. Пусть \mathfrak{J} — двусторонний идеал алгебры \mathfrak{A} . Элементы \widehat{U}, \widehat{V} называются эквивалентными относительно \mathfrak{J} , если $\widehat{U} - \widehat{V} \in \mathfrak{J}$. Множество всех эквивалентных между собой элементов называется классом вычетов алгебры \mathfrak{A} .

Определение 16. Множество всех классов вычетов алгебры \mathfrak{A} называется факторалгеброй и обозначается $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$.

Утверждение 3. Если в множестве $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ операции умножение классов на число, сложение классов и их перемножение ввести как соответствующие действия над представителями этих классов, то множество $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ приобретет структуру алгебры, т. е. факторалгебра является алгеброй.

Определение 17. Инволютивная алгебра называется нормированной, если в ней для каждого элемента \widehat{U} определена норма $\|\widehat{U}\|$ — неотрицательное число, удовлетворяющее условиям:

- а) $\|\alpha\widehat{U}\| = |\alpha|\|\widehat{U}\|$;
- б) $\|\widehat{U} + \widehat{V}\| \leq \|\widehat{U}\| + \|\widehat{V}\|$;
- в) $\|\widehat{U}^*\| = \|\widehat{U}\|$;
- г) $\|\widehat{U}\widehat{V}\| \leq \|\widehat{U}\| \|\widehat{V}\|$;
- д) если $\|\widehat{U}\| = 0$, то $\widehat{U} = 0$.

Определение 18. Величина $\|\widehat{U}\|$, для которой выполняются все условия предыдущего определения, кроме пункта д), называется полунормой.

Определение 19. Последовательность $\{\widehat{U}_n\}$ элементов нормированного пространства называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ и $m > N(\varepsilon)$ справедливо $\|\widehat{U}_n - \widehat{U}_m\| < \varepsilon$.

Определение 20. Нормированное пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится по норме к некоторому элементу этого пространства, называется полным.

Определение 21. Полное нормированное пространство называется банаховым пространством.

Утверждение 4. Любое нормированное пространство может быть пополнено до банахова пространства.

Определение 22. Инволютивная ассоциативная алгебра, являющаяся банаховым пространством (банаховой алгеброй), в которой норма удовлетворяет дополнительному условию $\|\widehat{U}^*\widehat{U}\| = \|\widehat{U}\|^2$, называется C^* -алгеброй.

Определение 23. Отображение $\widehat{U} \rightarrow \widehat{U}'$ инволютивной алгебры \mathfrak{A} ($\widehat{U} \in \mathfrak{A}$) в инволютивную алгебру \mathfrak{A}' ($\widehat{U}' \in \mathfrak{A}'$) называется гомоморфизмом алгебры \mathfrak{A} в алгебру \mathfrak{A}' , если из $\widehat{U} \rightarrow \widehat{U}'$, $\widehat{V} \rightarrow \widehat{V}'$ следует $\widehat{U}^* \rightarrow \widehat{U}'^*$, $\alpha\widehat{U} \rightarrow \alpha\widehat{U}'$, $\widehat{U} + \widehat{V} \rightarrow \widehat{U}' + \widehat{V}'$, $\widehat{U}\widehat{V} \rightarrow \widehat{U}'\widehat{V}'$.

При гомоморфизме нескольким элементам алгебры \mathfrak{A} может соответствовать один элемент алгебры \mathfrak{A}' .

Определение 24. Если гомоморфизм есть взаимно-однозначное отображение, то он называется изоморфизмом.

Определение 25. Изоморфное отображение алгебры на себя называется автоморфизмом.

Определение 26. Гомоморфизм коммутативной ассоциативной действительной (комплексной) алгебры \mathfrak{A} в множество действительных (комплексных) чисел называется характером этой алгебры.

Определение 27. Гомоморфизм алгебры \mathfrak{A} в множество линейных операторов некоторого гильбертова пространства \mathfrak{H} называется представлением этой алгебры.

Определение 28. Отображение нормированной алгебры \mathfrak{A} в нормированную алгебру \mathfrak{A}' называется изометрическим, если из $\widehat{U} \rightarrow \widehat{U}'$ следует $\|\widehat{U}\| \rightarrow \|\widehat{U}'\|$.

Определение 29. Отображение $\widehat{U} \rightarrow \varphi(\widehat{U})$ алгебры \mathfrak{A} в множество комплексных чисел называется линейным функционалом, если $\varphi(\alpha\widehat{U}) = \alpha\varphi(\widehat{U})$, $\varphi(\widehat{U} + \widehat{V}) = \varphi(\widehat{U}) + \varphi(\widehat{V})$. Здесь $\widehat{U}, \widehat{V} \in \mathfrak{A}$, а α и $\varphi(\widehat{U})$ — комплексные числа.

Определение 30. Линейный функционал φ на инволютивной алгебре \mathfrak{A} называется положительным, если $\varphi(\widehat{U}\widehat{U}^*) \geq 0$ для каждого $\widehat{U} \in \mathfrak{A}$.

Утверждение 5. Если $\varphi(\widehat{U})$ — положительный функционал, то

- а) $\varphi(\widehat{U}^*) = \varphi^*(\widehat{U})$;
- б) $|\varphi(\widehat{U}^*\widehat{V})|^2 \leq \varphi(\widehat{U}^*\widehat{U})\varphi(\widehat{V}^*\widehat{V})$.

Утверждение 6. Положительный функционал на банаховой алгебре непрерывен.

Утверждение 7. Если $\varphi(\widehat{U})$ ($\widehat{U} \in \mathfrak{A}$) — характер коммутативной ассоциативной алгебры \mathfrak{A} , то

- а) $\varphi(0) = 0$;
- б) $\varphi(\widehat{1}) = 1$;
- в) $\varphi(\widehat{U}\widehat{U}^*) \geq 0$.

Таким образом, характер является положительным функционалом на алгебре \mathfrak{A} .

Утверждение 8. Если дополнительно алгебра \mathfrak{A} банахова, а $\{\varphi(\widehat{U})\}$ — множество всех ее характеров, то

- а) $\lambda = \varphi(\widehat{U}) \in \sigma(\widehat{U}; \mathfrak{A})$;
- б) если $\lambda \in \sigma(\widehat{U}; \mathfrak{A})$, то $\lambda = \varphi(\widehat{U})$ для некоторого $\varphi(\widehat{U}) \in \{\varphi(\widehat{U})\}$.

Определение 31. Элемент \hat{p} алгебры \mathfrak{A} называется проектором, если $\hat{p}^* = \hat{p}$, $\hat{p}^2 = \hat{p}$.

Определение 32. Проектор $\hat{p}_\lambda \neq 0$ называется минимальным, если из $\hat{p}_\lambda \hat{p}_\mu = \hat{p}_\mu \hat{p}_\lambda = \hat{p}_\mu$ следует, что либо $\hat{p}_\mu = 0$, либо $\hat{p}_\mu = \hat{p}_\lambda$.

Утверждение 9. Если \mathfrak{A} — алгебра ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} , то минимальный проектор — это проектор на одномерное подпространство пространства \mathfrak{H} .

Определение 33. Будем говорить, что последовательность $\{\hat{U}_n\}$ элементов алгебры \mathfrak{A} сходится в слабой топологии к элементу \hat{U} , если для любого линейного ограниченного положительного функционала φ справедливо $\varphi(\hat{U}_n) \rightarrow \varphi(\hat{U})$.

Определение 34. Множество G элементов банаховой алгебры \mathfrak{A} называется системой образующих этой алгебры, если наименьшая замкнутая подалгебра, содержащая G , совпадает с \mathfrak{A} .

Определение 35. Булевой алгеброй множества Ω называется совокупность подмножеств множества Ω , в которой определены следующие алгебраические операции:

- а) операция логического сложения — объединение подмножеств;
- б) операция логического умножения — пересечение подмножеств;
- в) операция логического отрицания — дополнение подмножества до множества Ω .

Определение 36. Булева алгебра называется замкнутой относительно некоторой алгебраической операции, если в результате этой операции получается элемент исходной алгебры.

Определение 37. Булева алгебра называется σ -алгеброй, если она:

- а) содержит само множество Ω и пустое множество \emptyset ;
- б) содержит дополнение до Ω каждого подмножества, входящего в алгебру;
- в) замкнута относительно счетного числа объединений и пересечений подмножеств.

Определение 38. Множество Ω , в котором выбрана определенная σ -алгебра, называется измеримым пространством.

В дальнейшем ссылки на определения и утверждения будут делаться по следующему шаблону: (О.35.б) — определение 35, пункт б); (У.7.в) — утверждение 7, пункт в).

3. НАБЛЮДАЕМЫЕ, ИЗМЕРЕНИЯ, СОСТОЯНИЯ

Обратимся теперь к физическим проблемам.

При изучении физических систем базовым понятием является «наблюдаемая». Эвристически наблюдаемая — это такой атрибут исследуемой физической системы, для которого с помощью определенной измерительной процедуры можно получить некоторое численное значение.

Замечание. Далее мы будем предполагать, что зафиксирована некоторая система единиц, и поэтому все наблюдаемые можно считать безразмерными.

Понятие наблюдаемой является базовым как в классической, так и в квантовой физике. Однако традиционно в математическом аппарате классической и квантовой физики наблюдаемой сопоставляются различные математические объекты. Постараемся провести унификацию. Для этого необходимо выделить действительно существенные математические характеристики наблюдаемых, отделив их от характеристик, которые обычно приписываются наблюдаемым ради удобства построения математического аппарата.

Замечание. Часто для исследуемой системы заранее известны и остаются неизменными значения некоторых наблюдаемых. Например, при изучении взаимодействия электронов с фотонами заранее известны массы электронов и фотонов, заряд электрона. Такие величины удобно исключить из множества наблюдаемых, а их значения рассматривать как параметры, входящие в определение исследуемой физической системы.

В процессе измерения физическая система подвергается воздействию со стороны измерительного прибора. По характеру этого воздействия измерения можно подразделить на два типа: воспроизводимые и невозпроизводимые. Воспроизводимые измерения характеризуются тем, что, несмотря на возмущение, которое система испытывает при каждом измерении, повторное измерение той же наблюдаемой тем же или другим прибором дает тот же результат. Предполагается, что в интервале между измерениями система не подвергалась внешнему воздействию, а изменение значений наблюдаемых за счет свободной эволюции мы умеем учитывать.

Особый интерес представляет проблема воспроизводимости, когда мы проводим измерения нескольких наблюдаемых для одной физической системы. Пусть мы, например, измеряем наблюдаемую \hat{B} , затем наблюдаемую \hat{C} , потом опять наблюдаемую \hat{B} (возможно, прибором, отличным от первоначального) и, наконец, наблюдаемую \hat{C} . Если результаты повторных измерений для каждой наблюдаемой будут совпадать с результатами первичных измерений, то такие измерения назовем совместимыми. Если для наблюдаемых \hat{B} и \hat{C} существуют приборы, которые позволяют осуществить совместимые измерения, то такие наблюдаемые назовем совместимыми или одновременно измеримыми.

Опыт показывает, что у классических физических систем все наблюдаемые совместимы. В противоположность этому в квантовом случае существуют как совместимые, так и несовместимые наблюдаемые.

В стандартном формализме квантовой механики этот факт квалифицируется как составная часть «принципа дополнительности» [16]. Мы его будем рассматривать просто как свидетельство того, что для изме-

рения двух несовместимых наблюдаемых требуются приборы, которые несовместимы друг с другом [17].

Множество всех наблюдаемых обозначим \mathfrak{A}_+ , а его максимальное подмножество совместимых наблюдаемых обозначим \mathfrak{Q}_ξ . Индекс ξ отличает одно максимальное подмножество совместимых наблюдаемых от другого. В свою очередь, множество значений индекса ξ обозначим Ξ . Ясно, что для классической системы множество Ξ состоит из одного элемента. Для квантовой системы это множество состоит из более чем одного элемента. В дальнейшем мы убедимся, что в этом случае множество Ξ бесконечно и даже имеет мощность континуума. Одна и та же наблюдаемая может одновременно принадлежать различным подмножествам \mathfrak{Q}_ξ .

Опыт показывает, что для двух любых совместимых наблюдаемых \widehat{B} и \widehat{C} существует третья наблюдаемая \widehat{D} , которая обладает следующими свойствами. Во-первых, она совместима как с \widehat{B} , так и с \widehat{C} . Во-вторых, результаты одновременного измерения наблюдаемых \widehat{B} , \widehat{C} и \widehat{D} (для одной физической системы) удовлетворяют соотношению

$$B + C = D. \quad (1)$$

Здесь и далее результаты измерения обозначаются теми же символами, что и наблюдаемые, но без «крышки».

В действительности одновременность не очень существенна. Достаточно, чтобы измерения этих наблюдаемых были совместимы. Тем не менее в дальнейшем для краткости в подобной ситуации будем говорить, что наблюдаемые измеряются одновременно.

Соотношение (1) выполняется всегда, вне зависимости от конкретных результатов измерений. Это позволяет считать, что сами наблюдаемые связаны подобным соотношением

$$\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{D}.$$

Тем самым можно оснастить множество \mathfrak{Q}_ξ операцией сложения. Аналогичным образом вводятся операции перемножения элементов и умножение на действительное число. Опыт показывает, что каждое из подмножеств \mathfrak{Q}_ξ обладает свойствами действительной ассоциативной коммутативной алгебры. Таким образом, характеристическим математическим свойством наблюдаемых является то, что их можно рассматривать в качестве элементов некоторой алгебры. Пока мы обосновали это утверждение только для совместимых наблюдаемых. Далее мы увидим, что его можно распространить и на несовместимые наблюдаемые.

Если для фиксированной физической системы с помощью совместимых измерений мы каждой наблюдаемой сопоставим результат измерения

$$\widehat{B} \rightarrow B = \varphi_\xi(\widehat{B}),$$

то зададим функционал на алгебре Ω_ξ . В силу определения алгебраических операций в Ω_ξ этот функционал будет одним из характеров алгебры Ω_ξ (см. (O.26)).

В любом реальном измерении для любой наблюдаемой всегда получается конечное значение. Этот факт можно обратить и считать физическими (т. е. фиксируемыми в реальном эксперименте) только те наблюдаемые \widehat{B} , для которых

$$\sup_{\xi} \sup_{\varphi_{\xi}} |\varphi_{\xi}(\widehat{B})| < \infty. \quad (2)$$

В дальнейшем мы увидим, что ограниченность функционалов $\varphi_{\xi}(\cdot)$ не является непреодолимым препятствием для рассмотрения в теории наблюдаемых, которые не ограничены. В стандартном формализме квантовой механики такие наблюдаемые сплошь и рядом рассматриваются.

В качестве итога предыдущих рассуждений сформулируем четыре постулата.

Постулат 1. Множество Ω_ξ совместимых наблюдаемых можно оснастить структурой действительной ассоциативной коммутативной алгебры. Наоборот, если наблюдаемые принадлежат какой-нибудь одной действительной ассоциативной коммутативной алгебре, то они совместимы.

Постулат 2. Для классической системы все наблюдаемые совместимы.

Постулат 3. Результаты одновременного измерения наблюдаемых, принадлежащих алгебре Ω_ξ , описываются действительным ограниченным (в смысле неравенства (2)) функционалом $\varphi_{\xi}(\cdot)$, который является характером алгебры Ω_ξ .

Постулат 4. Наблюдаемые физической системы являются эрмитовыми элементами некоторой алгебры \mathfrak{A} .

С каждой областью \mathcal{O} четырехмерного пространства-времени \mathfrak{M} свяжем множество наблюдаемых, для которых можно получить численные значения, производя измерения в области \mathcal{O} . Такие наблюдаемые называются (см. [6, 7]) локальными (локализованными в области \mathcal{O}). Строго говоря, все наблюдаемые следовало бы считать локальными, однако в теории обычно рассматривают и глобальные (квазилокальные) наблюдаемые, имея в виду некоторые пределы последовательностей локальных наблюдаемых.

Что такое физическая система, интуитивно более или менее понятно. Однако далее нам будет удобнее перейти на формальный уровень и под термином «физическая система» подразумевать совокупность двух множеств: \mathcal{O} (область локализации системы в пространстве \mathfrak{M}) и $\mathfrak{A}_+(\mathcal{O})$ (множество ее наблюдаемых). Это позволит естественно переходить от физической системы к ее физической подсистеме: $\mathcal{O}, \mathfrak{A}_+(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}', \mathfrak{A}'_+(\mathcal{O}')$, где $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ и $\mathfrak{A}'_+(\mathcal{O}') \subset \mathfrak{A}_+(\mathcal{O})$. При этом мы не

будем предполагать, что подсистемы обязательно изолированы друг от друга. В общем случае системы и подсистемы могут быть открытыми.

В алгебраическом подходе точки пространства \mathfrak{M} в качестве наблюдаемых не рассматриваются. Соответственно, не предполагается, что пространство \mathfrak{M} линейно. Это очень существенно для согласования процедуры квантования с общей теорией относительности. Дело в том, что квантовые наблюдаемые являются элементами линейного пространства, а в общей теории относительности пространству \mathfrak{M} нелинейно.

В алгебраическом подходе принимается следующее.

Постулат 5. Пространство \mathfrak{M} является гладким многообразием.

Характерным свойством гладкого многообразия является то, что в окрестности каждой точки многообразия можно ввести локальную эвклидову систему координат.

Обсудим теперь понятие «состояние физической системы». Начнем обсуждение с классической системы. В этом случае под состоянием системы понимается некоторый атрибут физической системы, который однозначно определяет результат измерения всех наблюдаемых. Со времени Ньютона в физике принят принцип локальности, который, в частности, предполагает, что состояние локализованной физической системы определяется какими-то внутренними характеристиками этой системы и теми характеристиками воздействующего на систему внешнего поля, которые относятся к области локализации физической системы. Согласно классической парадигме должна существовать некая локальная реальность, которая определяет это состояние.

Математически состояние обычно задается с помощью точки в фазовом пространстве. При этом предполагается, что динамика системы задана. В рамках развиваемого здесь подхода такой способ задания состояния неудобен. Во-первых, его трудно перенести на квантовый случай. Во-вторых, он жестко связан с определенным способом задания динамики. В частности, он предполагает введение канонически сопряженных переменных. Однако нетрудно сообразить, что этот способ задания состояния всего лишь конкретный вариант задания на алгебре наблюдаемых некоторого действительного функционала, который является характером этой алгебры. Если не связываться ни с каким конкретным вариантом, то состояние классической системы можно определить как характер алгебры наблюдаемых этой системы.

Обратимся теперь к квантовому случаю. Множество \mathfrak{A}_+ квантовых наблюдаемых нельзя оснастить структурой ассоциативной коммутативной алгебры. Поэтому непосредственный перенос определения состояния с классической системы на квантовую невозможен. Однако множество \mathfrak{A}_+ можно рассматривать как совокупность подмножеств \mathfrak{Q}_ξ ($\xi \in \Xi$), каждое из которых имеет структуру действительной ассоциативной коммутативной алгебры. Каждое подмножество \mathfrak{Q}_ξ мы можем рассматривать в качестве множества наблюдаемых, соответствующих классической под-

системе квантовой системы. Конечно, эта классическая подсистема не будет изолирована от остальной части квантовой системы. Но изолированность не является обязательным условием выделения подсистемы.

Состояние каждой такой классической подсистемы мы по-прежнему можем математически описывать с помощью функционала $\varphi_\xi(\cdot)$, заданного на алгебре Ω_ξ и являющегося характером этой алгебры. В связи с этим введем новое понятие — элементарное состояние.

Определение 39. Назовем элементарным состоянием физической системы совокупность $\varphi = [\varphi_\xi]$ ($\xi \in \Xi$) функционалов φ_ξ , каждый из которых является некоторым характером соответствующей алгебры Ω_ξ . В свою очередь, множества Ω_ξ являются максимальными подмножествами множества \mathcal{A}_+ , которые имеют структуру действительной ассоциативной коммутативной алгебры.

Термин «состояние» оправдан и в квантовом случае. Действительно, в каждом отдельном измерении и даже в совокупности совместимых измерений мы можем самое большее найти значения некоторой совокупности совместимых наблюдаемых. Все эти наблюдаемые принадлежат какой-то одной алгебре Ω_ξ . Поэтому их значения определяются соответствующим функционалом φ_ξ . Задание элементарного состояния φ фиксирует все такие функционалы. Тем самым фиксирует результаты всех возможных измерений. В стандартном аппарате квантовой механики состоянием называется другой математический объект. Поэтому для $\varphi = [\varphi_\xi]$ мы используем термин «элементарное состояние». В стандартной формулировке квантовой механики такой термин не используется. В случае классической системы понятия элементарное состояние и состояние тождественны.

Этот этап рассуждений завершим следующим постулатом.

Постулат 6. Результат каждого индивидуального эксперимента по измерению наблюдаемых физической системы определяется элементарным состоянием этой системы.

В случае классической системы этот постулат не дает ничего нового. Наоборот, в квантовом случае этот постулат совершенно необычен. Более того, существуют многочисленные «доказательства» того, что ничего подобного быть не может. В нашем подходе этот постулат будет занимать центральное место.

Обратим внимание, что никаких дополнительных предположений о свойствах функционалов φ_ξ не делается. В частности, не предполагается, что

$$\varphi_\xi(\widehat{B}) = \varphi_{\xi'}(\widehat{B}), \text{ если } \widehat{B} \in \Omega_\xi \cap \Omega_{\xi'}. \quad (3)$$

Конечно, для некоторых функционалов φ равенство (3) может выполняться. Будем говорить, что функционал φ стабилен на наблюдаемой \widehat{B} , если равенство (3) выполняется для всех допустимых ξ и ξ' .

С другой стороны, кажется очень естественным потребовать выполнения равенства (3). В связи с этим возможность нарушения этого равенства нуждается в специальном комментарии.

Экспериментально значения наблюдаемых проявляются как отклик измерительного прибора на воздействие со стороны изучаемой системы. В принципе, отклики различных приборов на одно и то же воздействие могут быть разными.

Простейший классический пример — это измерение скорости. Различным образом движущиеся приборы для одной и той же исследуемой системы зафиксируют различные значения скорости. В подобных случаях обычно говорится, что значение многих наблюдаемых может зависеть от выбранной системы координат. Физически выбор определенной системы координат — это выбор определенной совокупности измерительных приборов. В общем случае приборы могут отличаться друг от друга не только своими пространственно-временными характеристиками.

С точки зрения экспериментатора зависимость результата измерения от особенностей измерительного прибора крайне нежелательна. Поэтому экспериментатор стремится унифицировать реакцию (показания) различных приборов. Такой унификации служит процедура калибровки приборов.

Схематически эта процедура выглядит следующим образом. В качестве шаблона берется измерительный прибор, который осуществляет воспроизводимое измерение некоторой наблюдаемой \hat{V} . С помощью этого прибора проводится измерение наблюдаемой \hat{V} у какой-нибудь тестовой физической системы. Получается некоторое значение V . По определению воспроизводимого измерения повторное измерение той же наблюдаемой прибором, подлежащим калибровке, должно дать то же значение. Только прибор, многократно выдерживающий такой тест, заслуживает названия измерительного. Калибровка призвана исключить зависимость результата измерения от неконтролируемого влияния прибора, в частности, от неконтролируемого состояния прибора.

Однако против одного параметра, значение которого может определяться прибором, калибровка бессильна. Таким параметром является $\xi \in \Xi$. Поясним, какое отношение параметр ξ имеет к измерительному прибору. Каждый прибор в зависимости от своей конструкции (настройки) предназначается либо для измерения одной наблюдаемой \hat{V} , либо для одновременного измерения группы наблюдаемых. Эта наблюдаемая (группа наблюдаемых) принадлежит какой-то алгебре \mathcal{Q}_ξ . Будем считать, что прибор относится к типу ξ , если, во-первых, он предназначен для измерения наблюдаемой (наблюдаемых) из подмножества \mathcal{Q}_ξ , во-вторых, результатом измерения наблюдаемой $\hat{V} \in \mathcal{Q}_\xi$ (группы совместимых наблюдаемых) является $V_\xi = \varphi_\xi(\hat{V})$ (группа соответствующих результатов).

С помощью калибровки нельзя выяснить, зависит ли результат измерения от параметра ξ . Действительно, первым этапом калибровки является воспроизводимое измерение, после которого состояние тестовой системы становится стабильным на наблюдаемой \widehat{B} . Поэтому результат последующего измерения этой наблюдаемой в любом случае не будет зависеть от параметра ξ . При любом другом способе проверки равенства (3) мы должны подвергнуть одну и ту же испытываемую систему двум измерениям: один раз с помощью прибора типа ξ , в другой раз — типа ξ' ($\xi \neq \xi'$). Это два разных прибора, поэтому одновременно оба измерения мы выполнить не можем.

Пусть мы сначала производим измерение с помощью прибора типа ξ и получаем результат $B_\xi = \varphi_\xi(\widehat{B})$. Если это измерение невоспроизводимое, то после него элементарное состояние φ испытываемой системы изменится неконтролируемым образом. Поэтому результат второго измерения (прибором типа ξ') в любом случае никак не будет связан с результатом первого измерения. Если первое измерение воспроизводимо, то после него элементарное состояние φ заменится на φ' . Так как после воспроизводимого измерения элементарное состояние становится стабильным на соответствующей наблюдаемой, то для состояния φ' должно выполняться соотношение $\varphi'_{\xi'}(\widehat{B}) = \varphi_\xi(\widehat{B})$ вне зависимости от того, выполняется или нет равенство (3). Таким образом, в любом случае равенство (3) мы проверить не сможем.

Конечно, приведенные рассуждения не гарантируют, что зависимость результатов измерения от параметра ξ существует. Они только демонстрируют возможность такой зависимости. Поэтому любые выводы, которые основываются на предположении справедливости равенства (3), не имеют доказательной силы. Надо подчеркнуть, что классификация приборов по типам ξ — это классификация по характеру взаимодействия прибора с исследуемой системой. Поэтому она определяется не только свойствами прибора, но и исследуемой системой (множеством \mathfrak{A}_+ , алгебрами \mathfrak{Q}_ξ).

Зависимость результата измерения от типа прибора можно рассматривать как реализацию и конкретизацию представлений Бора [18] о зависимости результата измерения от общего контекста эксперимента. Вместе с тем предлагаемый здесь вариант зависимости не противоречит ни принципу причинности, ни представлению о существовании локальной реальности. Однако локальная реальность — это не определенное значение каждой наблюдаемой для рассматриваемой физической системы, а некая причина, вызывающая определенную реакцию измерительного прибора определенного типа.

В общем случае значение наблюдаемой нельзя считать объективной характеристикой исследуемой системы. Оно может зависеть от характеристик измерительного прибора. С другой стороны, ничто не мешает

считать такой характеристикой (физической реальностью) элементарное состояние.

В измерении классическим прибором элементарное состояние квантовой системы не может быть зафиксировано однозначно. Действительно, так как приборы, предназначенные для измерения несовместимых наблюдаемых, несовместимы, то в одном эксперименте мы можем измерить наблюдаемые, принадлежащие одной алгебре Ω_ξ . В результате мы установим только значения функционала φ_ξ . В остальном элементарное состояние φ останется неопределенным. Повторное измерение с использованием другого типа прибора даст новую информацию, но неконтролируемым образом возмутит элементарное состояние, возникшее после первого измерения. Поэтому информация, полученная в первом измерении, станет бесполезной.

Образно говоря, элементарное состояние — это голографический образ исследуемой системы. С помощью классических приборов мы можем посмотреть на нее только с одной стороны и получить плоское изображение. При этом измерение возмутит систему и изменит ее исходный голографический образ. Поэтому если мы впоследствии посмотрим на исследуемую систему с другой стороны, то увидим плоскую часть нового голографического образа. Таким образом, цельного голографического образа мы никогда увидеть не сможем.

Используя понятие элементарного состояния, можно по-новому взглянуть на идею Эверетта [19] о существовании многих параллельных миров. Оригинальная идея заключается в том, что квантовые системы одновременно находятся во многих параллельных мирах, а классический наблюдатель по воле случая оказывается в одном из этих миров. Поэтому он видит тот вариант квантовой системы, который представлен в его мире. В таком виде идея выглядит фантастической.

В противоположность этому представление о том, что элементарное состояние аналогично голографической картине, выглядит вполне правдоподобно. С другой стороны, идея об элементарном состоянии приводит примерно к тем же следствиям, что и идея о существовании многих миров. Однако имеется существенное различие. В картине Эверетта случайность, присущая квантовому измерению, связывается со случайностью попадания наблюдателя в тот или иной мир. В рассматриваемой нами картине конкретный результат измерения не фиксирует однозначно элементарное состояние физической системы. Поэтому мы фактически не даем описание индивидуальной системы, а описываем некоторые характеристики, общие для целого ансамбля квантовых систем. В связи с этим полезно ввести понятие φ_η -эквивалентности. Два элементарных состояния $\varphi = [\varphi_\xi]$ и $\varphi' = [\varphi'_\xi]$ назовем φ_η -эквивалентными, если в них $\varphi_\eta = \varphi'_\eta$. Остальные φ_ξ и φ'_ξ могут находиться в любых соотношениях. Для класса φ_η -эквивалентных элементарных состояний введем обозначение $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$.

Самое большее, что можно узнать об элементарном состоянии φ , это то, что оно принадлежит некоторому классу эквивалентности $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$.

После этого мы можем сделать следующие предсказания. Если используются приборы η -типа, то для наблюдаемой $\widehat{B} \in \mathfrak{Q}_\eta$ получится результат $B = \varphi_\eta(\widehat{B})$. Если элементарное состояние φ стабильно на наблюдаемых $\widehat{B} \in \mathfrak{Q}_\eta$, то такой результат будет получаться при использовании приборов любых типов ξ . Конечно, ξ должно быть таким, чтобы $\widehat{B} \in \mathfrak{Q}_\xi$. В противном случае прибор просто не будет предназначен для измерения этой наблюдаемой. О результатах измерения наблюдаемых $\widehat{B} \notin \mathfrak{Q}_\eta$ ничего определенного сказать нельзя, так как для разных элементарных состояний $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ эти результаты будут разными. Самое большее, на что мы можем надеяться, это то, что удастся предсказать вероятность получения того или иного результата.

Перечисленными физическими свойствами в стандартном математическом аппарате квантовой механики обладает квантовое состояние, фиксируемое определенными значениями полного набора взаимно коммутирующих наблюдаемых. Это позволяет дать следующее определение квантового состояния в предлагаемом подходе.

Определение 40. Квантовым состоянием Ψ_{φ_η} назовем класс $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ φ_η -эквивалентных элементарных состояний, стабильных на наблюдаемых $\widehat{B} \in \mathfrak{Q}_\eta$.

В действительности такое определение квантового состояния удобно только для систем, в которых нет тождественных частиц. Дело в том, что измерительный прибор не может установить, какая из тождественных частиц в него попала. Поэтому удобно несколько обобщить понятие эквивалентности. Будем говорить, что элементарное состояние φ слабо φ_ξ -эквивалентно элементарному состоянию φ' , если сужение φ_ξ элементарного состояния φ на алгебру \mathfrak{Q}_ξ совпадает с сужением φ'_ξ элементарного состояния φ' на алгебру $\mathfrak{Q}_{\xi'}$. Здесь предполагается, что алгебра $\mathfrak{Q}_{\xi'}$ получается из алгебры \mathfrak{Q}_ξ заменой наблюдаемых одной из тождественных частиц на соответствующие наблюдаемые другой. Для систем с тождественными частицами в определении квантового состояния эквивалентности следует заменить на любую эквивалентность. Далее будем считать, что если необходимо, то такая замена сделана.

Если элементарное состояние мы можем считать объективным атрибутом отдельной физической системы, то квантовое состояние (класс эквивалентности элементарных состояний) следует считать атрибутом ансамбля физических систем. Такой ансамбль будем называть квантовым ансамблем. В принципе, класс эквивалентности элементарных состояний можно сопоставить и отдельной физической системе. Для этого достаточно считать, что отдельное элементарное состояние является атрибутом этой системы в фиксированный момент времени, а разным моментам времени сопоставлять разные элементарные состояния.

В этом случае время будет играть роль, отличную от той, которую оно играет в ньютоновской механике. В последнее время маркирует последовательность состояний, которую проходит изучаемая система в ходе своей эволюции. Причем в этой последовательности четко прослеживается стрела времени: причина всегда предшествует следствию. В упомянутом в предыдущем абзаце квантовом состоянии время маркирует различные элементарные состояния, составляющие квантовый ансамбль. Все вероятностные характеристики этого ансамбля могут зависеть от вида ансамбля, но не могут зависеть от последовательности, в которой расположены маркеры отдельных элементов ансамбля. Этим можно объяснить, почему, в отличие от уравнений Ньютона, уравнения, описывающие динамику квантовых систем, инвариантны относительно отражения времени.

4. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КВАНТОВЫЙ АНСАМБЛЬ

Большинство предсказаний квантовой теории носят вероятностный характер. Поэтому квантовая теория должна основываться на теории вероятностей. В настоящее время наиболее математически развитой является колмогоровская теория вероятностей [4]. Обычно считается, что для квантовых систем требуется специальная квантовая теория вероятностей. Здесь будет защищаться тезис о том, что и в квантовом случае вполне достаточно классической колмогоровской теории вероятностей, нужно только учесть особенность квантовых измерений [20].

В основе колмогоровской теории вероятностей (см., например, [4, 21]) лежит так называемое вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) .

Первая составляющая Ω — это множество (пространство) элементарных событий. Физический смысл элементарных событий специально не оговаривается, но считается, что они являются взаимоисключающими, и в каждом испытании реализуется одно и только одно элементарное событие. В нашем случае в качестве элементарного события может выступать элементарное состояние φ .

В стандартном математическом аппарате квантовой механики претендента на эту роль нет. Квантовое состояние, очевидно, не может играть роль элементарного события, так как два неортогональных квантовых состояния не являются взаимоисключающими. Поэтому, действительно, оставаясь в рамках стандартного формализма квантовой механики, нельзя использовать колмогоровскую теорию вероятностей. Аналогичным образом дело обстоит и с классической формальной логикой.

Помимо элементарного события в теории вероятностей вводится еще понятие «случайное событие» или просто «событие». Каждое событие F отождествляется с некоторым подмножеством множества Ω . Считается, что произошло событие F , если реализовалось одно из элементарных событий, принадлежащих этому подмножеству ($\varphi \in F$). Предполагается,

что в каждом испытании мы можем установить, произошло событие или нет. От элементарных событий этого не требуется.

Наборы подмножеств множества Ω (включающие само множество Ω и пустое множество \emptyset) наделяются структурой булевых алгебр. Соответственно, второй составляющей вероятностного пространства является некоторая булева σ -алгебра \mathcal{F} . Таким образом, вероятностное пространство оснащается структурой измеримого пространства.

Наконец, третья составляющая вероятностного пространства — вероятностная мера P . Это отображение множества \mathcal{F} в множество действительных чисел (каждому $F \in \mathcal{F}$ ставится в соответствие число $P(F)$), удовлетворяющее условиям: а) $0 \leq P(F) \leq 1$ для всех $F \in \mathcal{F}$, $P(\Omega) = 1$; б) $P(\sum_j F_j) = \sum_j P(F_j)$ для любой счетной совокупности непересекающихся подмножеств $F_j \in \mathcal{F}$.

Обратим внимание, что вероятностная мера определена только для событий, входящих в алгебру \mathcal{F} . Для элементарных событий вероятность, вообще говоря, не определена.

Поясним последнее утверждение простым примером. Пусть пространство элементарных событий — это множество рациональных чисел, лежащих между нулем и единицей. Испытание — это угадывание одного из этих чисел, загаданного собеседником. Очевидно, что вероятность угадывания любого из чисел не может иметь никакого численного значения, отличного от нуля. Но нулю она также не может равняться. Действительно, вероятность того, что загаданное число лежит между нулем и единицей, равна единице. Множество рациональных чисел счетно. Поэтому согласно свойствам вероятностной меры единица должна бы равняться счетной сумме нулей. Никакого противоречия не возникает, если в качестве \mathcal{F} мы выберем множество всех интервалов (и их объединений) и сопоставим каждому интервалу вероятность, равную его длине.

Таким образом, измеримость — очень существенное свойство вероятностного пространства. Далее мы убедимся, что в квантовом случае роль измеримости еще более важная. Кроме того, свойство измеримости несет не только математическую, но и очень существенную физическую нагрузку.

Теперь обсудим особенности приложения основных принципов теории вероятностей к квантовым измерениям. Большинство квантовых измерений связано с нахождением вероятностных распределений тех или иных наблюдаемых величин. При использовании определенной измерительной аппаратуры мы можем получить такое распределение для некоторой совокупности совместимых наблюдаемых. С точки зрения теории вероятностей, выбирая определенную измерительную аппаратуру, мы выбираем определенную σ -алгебру \mathcal{F} .

Для большей наглядности дальнейшее обсуждение проведем на конкретном примере. Пусть наша изучаемая система — это частица, которая

может двигаться в фиксированной плоскости. Пусть мы сначала хотим найти вероятностное распределение X -й координаты этой частицы. Для этого мы должны разбить плоскость движения на полосы, перпендикулярные оси X . Ширина полос должна быть согласована с чувствительностью используемого измерительного прибора. Эти полосы будут играть роль элементов F_i^X σ -алгебры \mathcal{F}_X . С помощью измерительного прибора мы сможем определить вероятность попадания частицы в определенную полосу. Аналогичный эксперимент можно провести для нахождения вероятностного распределения по оси Y . В этом случае полосы будем обозначать F_j^Y , а σ -алгебру \mathcal{F}_Y .

Мы можем провести более детальное исследование и найти вероятностное распределение координат частиц по обоим осям одновременно. Для этого надо разбить плоскость движения на прямоугольники, получающиеся пересечениями различных полос: $F_{ij}^{XY} = F_i^X \cap F_j^Y$. Прямоугольники F_{ij}^{XY} будут элементами σ -алгебры \mathcal{F}_{XY} . Говорят, что алгебра \mathcal{F}_{XY} порождена алгебрами \mathcal{F}_X и \mathcal{F}_Y . Пока никакой разницы в классическом и квантовом рассмотрении нет.

Пусть теперь мы хотим узнать вероятностное распределение не только для координат, но и для импульсов. Если мы интересуемся вероятностными распределениями по координатам и отдельно по импульсам, то эксперимент можно организовать по предыдущей схеме. Только полосы придется проводить и в плоскости импульсов.

Однако ситуация коренным образом изменится, если мы захотим найти вероятностное распределение, совместное по X -й координате и K_x -й проекции импульса. Формально, чисто математически (см., например, [21]), мы можем построить σ -алгебру \mathcal{F}_{XK_x} , которая порождается алгебрами \mathcal{F}_X и \mathcal{F}_{K_x} . Элементами такой алгебры будут прямоугольники (и всевозможные их объединения) в двумерной плоскости (XK_x) четырехмерного фазового пространства. В классическом случае мы можем организовать эксперимент для нахождения вероятности попадания частицы в такой прямоугольник. Однако в квантовом случае такой эксперимент принципиально невозможен, так как измерительные приборы, предназначенные для определения X -й координаты и K_x -й проекции импульса, несовместимы. Это значит, что такому прямоугольнику нельзя приписать никакой вероятностной меры. То есть для события, заключающегося в попадании частицы в такой прямоугольник, вообще не существует понятия «вероятность».

Общий вывод из рассмотренного примера следует сформулировать следующим образом. Не всякая математически возможная (и допустимая в классическом случае) σ -алгебра допустима в качестве σ -алгебры вероятностного пространства в квантовом случае.

Таким образом, элементу измеримого пространства (Ω, \mathcal{F}) в эксперименте соответствует пара — исследуемый объект и определенный тип измерительной аппаратуры, позволяющий зафиксировать событие, соответствующее некоторому набору совместимых наблюдаемых величин,

т. е. принадлежащих одной алгебре Ω_ξ . Поэтому σ -алгебра \mathcal{F} также может быть проиндексирована параметром ξ : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\xi$.

Особенность квантового эксперимента требует внимательности при определении одного из основных понятий теории вероятностей — действительной случайной величины. Обычно действительная случайная величина определяется как отображение пространства Ω элементарных событий в расширенную действительную прямую $\mathcal{R} = [-\infty, +\infty]$. Однако такое определение не учитывает особенностей квантового эксперимента, в котором результат может зависеть от типа измерительного прибора. Поэтому мы примем такое, более развернутое определение.

Определение 41. Действительной случайной величиной называется отображение измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{F}_\xi)$ элементарных событий в расширенную действительную прямую.

В приложении к наблюдаемой \widehat{B} это будет выглядеть так:

$$\varphi \xrightarrow{\widehat{B}} B_\xi(\varphi) \equiv \varphi_\xi(\widehat{B}) \in \mathcal{R}.$$

Назовем квантовым ансамблем множество одинаковых (т. е. описываемых одним множеством \mathfrak{A}_+ наблюдаемых и фиксированным множеством $\{\Omega_\xi\}$ коммутативных алгебр Ω_ξ ($\xi \in \Xi$)) физических систем, которые находятся в некотором квантовом состоянии. Смесь квантовых ансамблей, в которую каждый из этих ансамблей входит с кратностью C_i ($C_i \geq 0$, $\sum C_i < \infty$), назовем смешанным квантовым ансамблем. Эксперимент свидетельствует в пользу следующего постулата.

Постулат 7. Квантовый (в общем случае смешанный) ансамбль может быть оснащен структурой вероятностного пространства. В результате воспроизводимого измерения квантовый ансамбль переходит в квантовый ансамбль, вообще говоря, с другим вероятностным распределением наблюдаемых.

Рассмотрим ансамбль физических систем, которые находятся в квантовом состоянии Ψ_{φ_η} ($\eta \in \Xi$). Соответственно, будем рассматривать класс эквивалентности $[\varphi]_{\varphi_\eta}$ как пространство $\Omega(\varphi_\eta)$ элементарных событий φ . Пусть в эксперименте измеряется значение наблюдаемой $\widehat{B} \in \Omega_\xi$ и используется прибор типа ξ . Обозначим через $(\Omega(\varphi_\eta), \mathcal{F}_\xi)$ соответствующее измеримое пространство. Пусть P_ξ — вероятностная мера на этом пространстве, т. е. $P_\xi(F)$ — вероятность события $F \in \mathcal{F}_\xi$.

Будем считать, что в эксперименте реализуется событие F_B , если зарегистрированное значение наблюдаемой \widehat{B} не больше B . Вероятность этого события обозначим $P_\xi(F_B) = P(\varphi : \varphi_\xi(\widehat{B}) \leq B)$. Зная вероятности $P_\xi(F)$, с помощью соответствующих суммирований и интегрирований мы можем найти вероятность $P_\xi(F_B)$; распределение $P_\xi(F_B)$ является маргинальным для вероятностей $P_\xi(F)$ (см., например, [22]).

Наблюдаемая \widehat{B} может принадлежать не только алгебре Ω_ξ , но и другой максимальной алгебре $\Omega_{\xi'}$. Поэтому для определения вероятности

сти события F_B мы можем использовать прибор типа ξ' . В этом случае для вероятности мы могли бы получить другое значение $P_{\xi'}(F_B)$. Однако опыт показывает, что вероятности не зависят от используемого измерительного прибора. Поэтому мы должны принять еще один постулат.

Постулат 8. Пусть наблюдаемая $\hat{B} \in \mathfrak{Q}_\xi \cap \mathfrak{Q}_{\xi'}$, тогда вероятность обнаружить событие F_B для системы, находящейся в квантовом состоянии Ψ_{φ_η} , не зависит от типа используемого прибора, т. е. $P(\varphi : \varphi_\xi(\hat{B})) \leq B) = P(\varphi : \varphi_{\xi'}(\hat{B}) \leq B)$.

Поэтому, несмотря на то, что элементарное состояние φ — это совокупность функционалов φ_ξ , для вероятности события F_B мы вправе использовать обозначение $P(\varphi : \varphi(\hat{B}) \leq B)$.

Введем еще обозначение

$$P_{\hat{B}}(d\varphi) = P(\varphi : \varphi(\hat{B}) \leq B + dB) - P(\varphi : \varphi(\hat{B}) \leq B)$$

и рассмотрим ансамбль квантовых систем, находящихся в квантовом состоянии Ψ_{φ_η} . Согласно теории вероятностей (см., например, [21]) математическое ожидание наблюдаемой \hat{B} в этом состоянии определяется формулой

$$\langle \hat{B} \rangle = \int_{\varphi \in \Psi_{\varphi_\eta}} P_{\hat{B}}(d\varphi) \varphi(\hat{B}). \tag{4}$$

С другой стороны, справедлива теорема Хинчина (см. закон больших чисел, например, в [21]).

Теорема. Пусть $B_i = \varphi_i(\hat{B})$ ($1 \leq i \leq n$, $\varphi_i \in \Psi_{\varphi_\eta}$) — последовательность взаимно независимых случайно выбранных величин, имеющих одно и то же распределение вероятностей с конечным математическим ожиданием $\langle \hat{B} \rangle$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ величина $(B_1 + \dots + B_n)/n$ сходится по вероятности к $\langle \hat{B} \rangle$. Таким образом,

$$\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{B}) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[n^{-1} (\varphi_1(\hat{B}) + \dots + \varphi_n(\hat{B})) \right] = \langle \hat{B} \rangle. \tag{5}$$

Формула (5) определяет функционал (квантовое среднее) на множестве \mathfrak{A}_+ . Этот функционал мы обозначили символом $\Psi_{\varphi_\eta}(\cdot)$ и будем также называть квантовым состоянием. Из формулы (5) и свойств функционалов $\varphi_i(\cdot)$ сразу же следует, что $\Psi_{\varphi_\eta}(\cdot)$ линеен на каждом подмножестве \mathfrak{Q}_ξ совместимых наблюдаемых. То есть сужение функционала $\Psi_{\varphi_\eta}(\cdot)$ на каждое подмножество \mathfrak{Q}_ξ является линейным функционалом. Свойство линейности функционала $\Psi_{\varphi_\eta}(\cdot)$ можно распространить на все множество \mathfrak{A}_+ . Однако предварительно надо оснастить множество \mathfrak{A}_+ структурой действительного линейного пространства.

Так как каждый элемент \hat{B} множества \mathfrak{A}_+ принадлежит какому-то линейному подмножеству \mathfrak{Q}_ξ , то для него операция умножения на действительное число определена. С операцией сложения элементов \hat{B} и

\widehat{C} дело обстоит сложнее, так как эти элементы могут принадлежать разным линейным подмножествам \mathfrak{Q}_ξ и $\mathfrak{Q}_{\xi'}$. Однако вся совокупность квантовых экспериментов указывает на то, что при любых \widehat{B} и \widehat{C} , принадлежащих \mathfrak{A}_+ , существует такой элемент $\widehat{D} \in \mathfrak{A}_+$, что для каждого квантового состояния $\Psi_{\varphi_\eta}(\cdot)$ справедливо

$$\Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{B}) + \Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{C}) = \Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{D}).$$

Такой элемент \widehat{D} мы можем по определению считать суммой элементов \widehat{B} и \widehat{C} , т. е. $\widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C}$. Имея в виду эти рассуждения, примем следующий постулат.

Постулат 9. Множество \mathfrak{A}_+ может быть оснащено структурой действительного линейного пространства, и функционалы $\Psi_{\varphi_\eta}(\cdot)$ линейны на этом пространстве.

Это значит, что

$$\Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{B}) + \Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{C}) = \Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{B} + \widehat{C})$$

и в том случае, когда \widehat{B} и \widehat{C} принадлежат разным подмножествам \mathfrak{Q}_ξ и $\mathfrak{Q}_{\xi'}$.

Множество \mathfrak{A}_+ можно оснастить структурой действительной алгебры. Для этого произведение элементов \widehat{B} и \widehat{C} следует определить формулой

$$\widehat{B} \circ \widehat{C} = \frac{1}{2} \left((\widehat{B} + \widehat{C})^2 - \widehat{B}^2 - \widehat{C}^2 \right). \quad (6)$$

Это произведение очевидным образом коммутативно, но в общем случае неассоциативно (см. (O.3)), т. е. ассоциатор $\{\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}\} = (\widehat{B} \circ \widehat{C}) \circ \widehat{D} - \widehat{B} \circ (\widehat{C} \circ \widehat{D})$ не обязательно равен нулю. Можно показать (см. [6]), что для дистрибутивности (см. (O.2.б, в)) произведения $\widehat{B} \circ \widehat{C}$ необходимо и достаточно равенства нулю ассоциатора $\{\widehat{B}, \widehat{C}, \alpha \widehat{I}\}$ для любых \widehat{B} и \widehat{C} и любого действительного числа α . При выполнении этого условия действительная алгебра с произведением (6) называется действительной алгеброй Иордана [23, 6].

В принципе, квантовую теорию можно пытаться строить на основе этой алгебры. Однако на этом пути удалось достичь лишь отдельных успехов (см. [6]). Гораздо более успешным оказалось направление, основанное на комплексной ассоциативной алгебре, для которой алгебра Иордана в некотором смысле является действительной частью.

Все алгебры Иордана разделяются на два класса: специальные и исключительные. Специальная алгебра Иордана определяется следующим образом. Пусть имеется действительная или комплексная алгебра \mathfrak{A} с «обычным» произведением $\widehat{U}\widehat{V}$ ($\widehat{U} \in \mathfrak{A}, \widehat{V} \in \mathfrak{A}, \widehat{U}\widehat{V} \in \mathfrak{A}$). Относительно

этого произведения алгебра ассоциативна, но не обязательно коммутативна. В множестве \mathfrak{A} можно ввести «симметризованное» произведение

$$\widehat{U} \circ \widehat{V} = \frac{1}{2}(\widehat{U}\widehat{V} + \widehat{V}\widehat{U}). \quad (7)$$

Относительно такого произведения множество \mathfrak{A} будет алгеброй Иордана. Любая алгебра Иордана, изоморфная такой алгебре (или ее подалгебре), называется специальной. В противном случае алгебра Иордана называется исключительной. Не всякая алгебра Иордана является специальной. Поэтому чтобы алгебра Иордана была специальной, ее элементы должны удовлетворять некоторым тождествам, которые, в принципе, могли бы быть проверены в эксперименте. Однако в настоящий момент перечень этих тождеств неизвестен. С другой стороны, в любой из рассмотренных до сих пор квантовых моделей множество наблюдаемых может быть оснащено структурой специальной алгебры Иордана.

Мы останемся в рамках этой традиции и примем следующую гипотезу.

Гипотеза. Иорданова алгебра наблюдаемых является специальной и действительной.

В дальнейшем элементы алгебры \mathfrak{A} будем называть динамическими величинами. Множество \mathfrak{A}_+ мы можем снабдить структурой алгебры Иордана, определив произведение его элементов с помощью формулы (7). Из гипотезы следует, что динамические величины можно складывать и перемножать, используя обычные правила сложения и умножения (кроме коммутирования). Это кажется настолько очевидным, что почти никогда специально не оговаривается. Тем не менее соответствующие утверждения мы назвали гипотезой, а не постулатом потому, что мы не можем указать экспериментального способа проверки *необходимости* этого утверждения.

Надо подчеркнуть, что в стандартном подходе к квантовой механике утверждение гипотезы принимается в гораздо более сильной форме. Там предполагается, что наблюдаемые являются самосопряженными операторами в некотором гильбертовом пространстве. Это предположение вряд ли можно считать самоочевидным.

Далее физическую систему будем считать заданной, если задана алгебра \mathfrak{A} ее динамических величин. В силу первого постулата алгебры \mathfrak{Q}_ξ совместимых наблюдаемых являются максимальными действительными коммутативными подалгебрами алгебры \mathfrak{A} , принадлежащими \mathfrak{A}_+ . Отсюда, в свою очередь, следует, что совместимые наблюдаемые являются взаимно коммутирующими элементами алгебры \mathfrak{A} , а несовместимые наблюдаемые не коммутируют между собой.

Ранее упоминалось, что в квантовом случае множество Ξ подалгебр $\mathfrak{Q}_\xi (\xi \in \Xi)$ имеет мощность континуума. Действительно, даже если алгебра \mathfrak{A} — это алгебра с двумя некоммутирующими эрмитовыми

образующими \widehat{B}_1 и \widehat{B}_2 , то коммутативная алгебра Ω_α с образующей $\widehat{B}_\alpha = \widehat{B}_1 \cos \alpha + \widehat{B}_2 \sin \alpha$ будет алгеброй типа Ω_ξ при любом действительном α .

5. C^* -АЛГЕБРА И ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Любой элемент \widehat{U} алгебры \mathfrak{A} однозначно представляется в виде $\widehat{U} = \widehat{B} + i\widehat{C}$, где $\widehat{B}, \widehat{C} \in \mathfrak{A}_+$. Поэтому функционал $\Psi_{\varphi_\eta}(\cdot)$ можно однозначно расширить до линейного функционала на алгебре \mathfrak{A} : $\Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{U}) = \Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{B}) + i\Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{C})$.

Определим полуnormу элемента \widehat{U} равенством

$$\|\widehat{U}\|^2 = \sup_{\xi} \sup_{\varphi_\xi} \varphi_\xi(\widehat{U}^* \widehat{U}) = r(\widehat{U}^* \widehat{U}), \tag{8}$$

где $r(\widehat{U}^* \widehat{U})$ — спектральный радиус элемента $\widehat{U}^* \widehat{U}$ в алгебре \mathfrak{A} .

Такое определение допустимо. Во-первых, $\|\widehat{U}\|^2 \geq 0$ благодаря свойству (У.7.в). Далее, в силу определения вероятностной меры для любого $\eta \in \Xi$, имеем

$$\Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{U}^* \widehat{U}) = \int_{\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}} P_{\widehat{U}^* \widehat{U}}(d\varphi) [\widehat{U}^* \widehat{U}](\varphi) \leq \sup_{\xi} \sup_{\varphi_\xi} \varphi_\xi(\widehat{U}^* \widehat{U}) = r(\widehat{U}^* \widehat{U}). \tag{9}$$

Для $\eta \in \Xi$ такого, что $\widehat{U}^* \widehat{U} \in \Omega_\eta$, справедливо $\Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{U}^* \widehat{U}) = \varphi_\eta(\widehat{U}^* \widehat{U})$. Поэтому для такого η

$$\sup_{\varphi_\eta} \Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{U}^* \widehat{U}) = \sup_{\varphi_\eta} \varphi_\eta(\widehat{U}^* \widehat{U}) = r_\eta(\widehat{U}^* \widehat{U}), \tag{10}$$

где $r_\eta(\widehat{U}^* \widehat{U})$ — спектральный радиус в Ω_η . Так как подалгебра Ω_η максимална, то (см. (У.2)) $r_\eta(\widehat{U}^* \widehat{U}) = r(\widehat{U}^* \widehat{U})$. Отсюда, учитывая равенства (8), (9) и (10), получаем

$$\|\widehat{U}\|^2 = \sup_{\xi} \sup_{\varphi_\xi} \varphi_\xi(\widehat{U}^* \widehat{U}) = \sup_{\xi} \sup_{\varphi_\xi} \Psi_{\varphi_\xi}(\widehat{U}^* \widehat{U}). \tag{11}$$

Так как $\Psi_{\varphi_\xi}(\cdot)$ — линейный положительный функционал, то справедливо неравенство Коши–Буняковского–Шварца (см. (У.5.6))

$$|\Psi_{\varphi_\xi}(\widehat{U}^* \widehat{V}) \Psi_{\varphi_\xi}(\widehat{V}^* \widehat{U})| \leq \Psi_{\varphi_\xi}(\widehat{U}^* \widehat{U}) \Psi_{\varphi_\xi}(\widehat{V}^* \widehat{V}). \tag{12}$$

Отсюда следует, что для $\|\widehat{U}\|$ выполняются аксиомы полуnormы элемента \widehat{U} (см., например, [6]):

$$\|\widehat{U} + \widehat{V}\| \leq \|\widehat{U}\| + \|\widehat{V}\|, \quad \|\lambda \widehat{U}\| = |\lambda| \|\widehat{U}\|, \quad \|\widehat{U}^*\| = \|\widehat{U}\|, \quad \|\widehat{U} \widehat{V}\| \leq \|\widehat{U}\| \|\widehat{V}\|.$$

Рассмотрим теперь множество \mathfrak{J} элементов \widehat{U} алгебры \mathfrak{A} , для которых $\|\widehat{U}\|^2 = 0$. Из неравенства (12) следует, что \mathfrak{J} является двусторонним идеалом \mathfrak{A} . Поэтому можно образовать факторалгебру $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$. В ал-

гебре \mathfrak{A}' из $\|\widehat{U}\|^2 = 0$ следует $\widehat{U} = 0$. Поэтому в алгебре \mathfrak{A}' равенство (8) определяет не полунорму, а норму. С другой стороны, можно убедиться, что алгебра \mathfrak{A}' несет ту же физическую информацию, что и \mathfrak{A} .

Для этой цели рассмотрим две наблюдаемые \widehat{B} и \widehat{C} , которые одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат каждой из подалгебр Ω_ξ . Пусть \widehat{B} и \widehat{C} удовлетворяют дополнительному условию $\|\widehat{B} - \widehat{C}\| = 0$. Тогда из равенства (8) следует

$$\varphi_\xi(\widehat{B}) = \varphi_\xi(\widehat{C}) \tag{13}$$

для всех Ω_ξ , которые содержат эти наблюдаемые. Равенство (13) означает, что никакой эксперимент не может различить эти наблюдаемые. Поэтому с феноменологической точки зрения эти наблюдаемые следует отождествить. Математически эти наблюдаемые эквивалентны по идеалу \mathfrak{J} . При переходе от алгебры \mathfrak{A} к алгебре \mathfrak{A}' все эквивалентные наблюдаемые отождествляются математически. Чтобы сразу иметь дело с алгеброй типа \mathfrak{A}' , можно принять следующий постулат.

Постулат 10. Если $\sup_{\xi} \sup_{\varphi_\xi} |\varphi_\xi(\widehat{B} - \widehat{C})| = 0$, то $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Постулат 10 носит технический характер. Вместе с тем с точки зрения феноменологии он не накладывает никаких дополнительных ограничений. Он только упрощает математическое описание физических систем. Далее будем считать, что требование постулата 10 удовлетворяется, и поэтому равенство (11) определяет норму элемента \widehat{U} .

Из мультипликативности функционала φ_ξ следует $\varphi_\xi([\widehat{U}^* \widehat{U}]^2) = [\varphi_\xi(\widehat{U}^* \widehat{U})]^2$. Это значит, что $\|\widehat{U}^* \widehat{U}\| = \|\widehat{U}\|^2$. Поэтому если мы пополним алгебру \mathfrak{A} по норме $\|\cdot\|$, то \mathfrak{A} превратится в C^* -алгебру [15]. Таким образом, алгебра квантовых динамических величин может быть оснащена структурой C^* -алгебры. В стандартном алгебраическом подходе к квантовой теории это утверждение принимается в качестве исходной аксиомы. Математически это, конечно, очень удобно. Однако с феноменологической точки зрения необходимость такой аксиомы остается совершенно неясной.

С технической точки зрения постулаты 7–10 удобно заменить единым постулатом о квантовом среднем.

Постулат (QM). Вероятностное распределение на классе эквивалентности $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ таково, что правая часть равенства (14) не зависит от ξ и задает линейный функционал $\Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{B})$ на алгебре \mathfrak{A} :

$$\Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{B}) = \int_{\varphi \in \Psi_{\varphi_\eta}} P_{\widehat{B}}(d\varphi) \varphi_\xi(\widehat{B}), \tag{14}$$

где

$$P_{\widehat{B}}(d\varphi) = P(\varphi : \varphi_\xi(\widehat{B}) \leq B + dB) - P(\varphi : \varphi_\xi(\widehat{B}) \leq B)$$

— вероятностная мера на классе $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$.

В большинстве наших предыдущих построений центральное место занимало элементарное состояние $\varphi = [\varphi_\xi]$. Элементарное состояние обладает многими свойствами, которые обычно приписывают так называемым скрытым параметрам [24]. В стандартном подходе к квантовой механике со времен фон Неймана [1] прочно укоренилось мнение, что в квантовой механике скрытых параметров нет и быть не может. Поэтому необходимо убедиться, что элементарные состояния можно ввести непротиворечивым образом.

Задание физической системы предполагает задание алгебры \mathfrak{A} динамических величин. Как мы только что убедились, эта алгебра должна иметь структуру C^* -алгебры. Задавая алгебру \mathfrak{A} , мы тем самым задаем множество ее максимальных коммутативных ассоциативных подалгебр Ω_ξ . Каждая из этих подалгебр является банаховой алгеброй.

Ясно, что для построения любого элементарного состояния $\varphi = [\varphi_\xi]$ необходимо и достаточно построить все его составляющие φ_ξ , а каждое φ_ξ — это характер подалгебры Ω_ξ . Каждый функционал φ_ξ можно построить следующим образом. В подалгебре Ω_ξ произвольным образом выбираем систему $G(\Omega_\xi)$ независимых образующих. Имея в виду утверждение (V.8), каждому элементу множества $G(\Omega_\xi)$ ставим в соответствие одну из точек его спектра. Так мы определяем функционал φ_ξ на множестве $G(\Omega_\xi)$. По линейности и мультипликативности функционал φ_ξ однозначно расширяется на всю подалгебру Ω_ξ . Перебирая для каждого элемента множества $G(\Omega_\xi)$ все точки его спектра, мы построим все функционалы φ_ξ . Для другого ξ функционалы φ_ξ строим по тому же рецепту. Эта процедура заведомо непротиворечива, если для разных ξ функционалы строятся независимо друг от друга. Если мы наложим условие (3), то процедура может оказаться, и в некоторых случаях действительно оказывается, противоречивой.

Однако всегда можно построить элементарное состояние φ , стабильное на всех наблюдаемых, принадлежащих любой одной подалгебре Ω_ξ . Для этого достаточно начать построение функционала φ именно с этой подалгебры, используя только что описанную процедуру. На другой подалгебре $\Omega_{\xi'}$ функционал $\varphi_{\xi'}$ строим следующим образом. Пусть $\Omega_\xi \cap \Omega_{\xi'} = \Omega_{\xi\xi'}$ и $G(\Omega_{\xi\xi'})$ — независимые образующие подалгебры $\Omega_{\xi\xi'}$. Пусть $\tilde{G}(\Omega_{\xi\xi'})$ — дополнение этих образующих до множества образующих подалгебры $\Omega_{\xi'}$. Если $\hat{B} \in \Omega_{\xi\xi'}$, то полагаем $\varphi_{\xi'}(\hat{B}) = \varphi_\xi(\hat{B})$. Если $\hat{B} \in \tilde{G}(\Omega_{\xi\xi'})$, то строим $\varphi_{\xi'}(\hat{B})$ как отображение элемента \hat{B} в одну из точек его спектра. На остальные элементы подалгебры $\Omega_{\xi'}$ функционал $\varphi_{\xi'}$ продлевается по линейности и мультипликативности.

Таким образом, мы видим, что для элементарного состояния проблема существования отсутствует. Доказательство фон Неймана [1] невозможности существования скрытых параметров для элементарных состояний φ не проходит по следующей причине. Фон Нейман предполагал, что состояние описывается линейным функционалом на множестве наблюда-

емых. Элементарное состояние φ можно рассматривать как некий функционал на множестве наблюдаемых. Однако этот функционал линеен только на подмножествах Ω_ξ , кроме того, этот функционал многозначен.

В этом доказательстве фон Нейман также показал, что линейность функционала, описывающего состояние системы, несовместима с предположением о наличии причинности на микроскопическом уровне. Отсюда он сделал вывод, что причинность на микроуровне отсутствует, а на макроуровне появляется за счет усреднения по большому числу непринципиальных событий. Предлагаемый здесь подход допускает гораздо более правдоподобное утверждение. На микроскопическом уровне причинность есть, а линейности состояния, описывающего индивидуальную квантовую систему, нет. Линейность квантового состояния возникает за счет усреднения по квантовому ансамблю.

Заметим, что возникновение свойства линейности при усреднении — это обычное явление в теории вероятностей. Поэтому принципы линейности и суперпозиции, которые обычно в квантовой механике рассматриваются как краеугольные физические принципы, в действительности таковыми не являются. Эти свойства всего лишь математические артефакты, обязанные своим происхождением процедуре усреднения. В противоположность этому причинность — это действительно физический принцип, который в обход «официального запрета» широко используется в физике. Именно элементарное состояние может претендовать на роль математического образа реальности, которая является физическим носителем причинности.

Упомянутое свойство суперпозиции обязано своим происхождением следующей замечательной особенности C^* -алгебры. Любая C^* -алгебра изометрически изоморфна подалгебре линейных ограниченных операторов в подходящем гильбертовом пространстве [15]. Это позволит нам в дальнейшем использовать привычный аппарат гильбертова пространства, в котором свойство суперпозиции возникает естественным образом.

Замечание. В стандартном подходе к квантовой механике обычно предполагается, что все самосопряженные ограниченные операторы в гильбертовом пространстве являются наблюдаемыми. Это предположение не выполняется в моделях с правилами суперотбора [25]. Алгебраический подход (в том числе и рассматриваемый здесь) обходится без такого предположения.

В алгебраическом подходе состояние определяется как положительный линейный функционал Ψ на множестве наблюдаемых, удовлетворяющий условию нормировки $\Psi(\hat{I}) = 1$. В стандартном подходе к квантовой механике состояние обычно задается либо с помощью вектора в гильбертовом пространстве, либо, в более общем случае, с помощью матрицы плотности. Однако не всякое интересное с физической точки зрения состояние может быть задано с помощью матрицы плотности (см. [6]). Поэтому алгебраическое определение является более общим.

Часто так определенное состояние называют алгебраическим. Так как $\varphi(\hat{I}) = 1$ (см. (У.7.6)), то определенный формулой (4) функционал $\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{B})$ удовлетворяет условию нормировки. Поэтому введенное здесь квантовое состояние является алгебраическим состоянием. Поскольку линейный положительный функционал, определенный на множестве наблюдаемых, однозначно расширяется на алгебру динамических величин, то в дальнейшем мы будем называть алгебраическим состоянием линейный положительный нормированный функционал, определенный на алгебре \mathfrak{A} .

Определение 42. Алгебраическое состояние Ψ называется чистым, если равенство

$$\Psi = \lambda\Psi_1 + (1 - \lambda)\Psi_2, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (15)$$

где Ψ_1 и Ψ_2 — два состояния, возможно только в случае $\Psi_1 = \Psi_2$.

Нетрудно убедиться, что введенное нами в определении (О.40) квантовое состояние Ψ_{φ_ξ} является алгебраическим чистым состоянием. Действительно, предположим, что функционал Ψ_{φ_ξ} можно представить в виде (15). Сузим равенство (15) на подалгебру Ω_ξ . На этой подалгебре, т. е. для всех $\hat{B} \in \Omega_\xi$, справедливо $\varphi_\xi(\hat{B}) = \Psi_{\varphi_\xi}(\hat{B})$. Но функционал $\varphi_\xi(\cdot)$ является характером подалгебры Ω_ξ . Каждый характер коммутативной алгебры — это чистое состояние (см. [14]). Поэтому из равенства $\Psi_{\varphi_\xi}(\hat{B}) = \lambda\Psi_1(\hat{B}) + (1 - \lambda)\Psi_2(\hat{B})$ следует, что при $\hat{B} \in \Omega_\xi$ справедливо $\Psi_1(\hat{B}) = \Psi_2(\hat{B}) = \Psi_{\varphi_\xi}(\hat{B}) = \varphi_\xi(\hat{B})$ и, в частности,

$$\Psi_1([\hat{B} - \varphi_\xi(\hat{B})]^2) = \varphi_\xi([\hat{B} - \varphi_\xi(\hat{B})]^2) = 0.$$

Отсюда следует, что при $\hat{B} \in \Omega_\xi$

$$\int_{\varphi \in \Psi_1} P_{\hat{B}}(d\varphi) \varphi([\hat{B} - \varphi_\xi(\hat{B})]^2) \equiv \Psi_1([\hat{B} - \varphi_\xi(\hat{B})]^2) = 0.$$

Поэтому если $\varphi \in \Psi_1$, то почти наверное $\varphi(\hat{B}) = \varphi_\xi(\hat{B})$ при $\hat{B} \in \Omega_\xi$. Это значит, что почти наверное элементарные состояния $\varphi \in \Psi_1$ образуют класс эквивалентности $[\varphi]_{\varphi_\xi}$. Отсюда следует, что

$$\Psi_1(\hat{B}) = \int_{\varphi \in \Psi_1} P_{\hat{B}}(d\varphi) \varphi(\hat{B}) = \int_{\varphi \in \Psi_{\varphi_\xi}} P_{\hat{B}}(d\varphi) \varphi(\hat{B}) = \Psi_{\varphi_\xi}(\hat{B})$$

при всех \hat{B} . Аналогично для $\Psi_2(\hat{B})$, т. е. $\Psi_1(\hat{B}) = \Psi_2(\hat{B})$.

Процедурой, которая реализует связь C^* -алгебры с гильбертовым пространством, является так называемая каноническая конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС) (см., например, [13, 6]). Вкратце она состоит в следующем.

Пусть имеется некоторая C^* -алгебра \mathfrak{A} и линейный положительный функционал Ψ_0 на этой алгебре. Будем считать два элемента

$\widehat{U}, \widehat{U}' \in \mathfrak{A}$ эквивалентными, если для любого $\widehat{W} \in \mathfrak{A}$ справедливо равенство $\Psi_0(\widehat{W}^*(\widehat{U} - \widehat{U}')) = 0$. Обозначим через $\Phi(\widehat{U})$ класс эквивалентности элемента \widehat{U} и рассмотрим множество $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ всех классов эквивалентности в \mathfrak{A} . Превратим множество $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ в линейное пространство, положив $a\Phi(\widehat{U}) + b\Phi(\widehat{V}) = \Phi(a\widehat{U} + b\widehat{V})$. Определим в $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ скалярное произведение формулой

$$(\Phi(\widehat{U}), \Phi(\widehat{V})) = \Psi_0(\widehat{U}^*\widehat{V}). \tag{16}$$

Это скалярное произведение порождает в алгебре $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ норму $\|\Phi(\widehat{U})\| = [\Psi_0(\widehat{U}^*\widehat{U})]^{1/2}$. Пополнение по этой норме превращает $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ в гильбертово пространство. Каждый элемент \widehat{V} алгебры \mathfrak{A} однозначно представляется в этом пространстве линейным оператором \widetilde{V} , действующим по правилу

$$\widetilde{V}\Phi(\widehat{U}) = \Phi(\widehat{V}\widehat{U}). \tag{17}$$

Таким образом, конструкция ГНС позволяет построить представление любой C^* -алгебры. Рассмотрим конструкцию ГНС, в которой в качестве функционала, порождающего представление, выступает функционал $\Psi_{\varphi_\eta}(\cdot)$, который фигурирует в формуле (4). Пусть $\Phi(\widehat{I})$ — класс эквивалентности единичного элемента \widehat{I} , тогда, согласно формулам (16) и (17), будем иметь

$$\Phi(\widehat{I}), \widetilde{V}\Phi(\widehat{I}) = \Psi(\widehat{V}). \tag{18}$$

Это ничто иное как постулат Борна [26]. Таким образом, конструкция ГНС позволяет воспроизвести стандартный математический аппарат квантовой механики.

Вместе с тем в этом пункте имеется существенное отличие предлагаемого подхода к квантовой механике от стандартного. Постулат Борна *достаточен* для квантово-механических расчетов, однако его *необходимость* не ясна. В противоположность этому в нашем случае равенство (18) является следствием феноменологически необходимых постулатов.

К постулату Борна мы еще вернемся, а пока напомним, какие бывают представления.

Представление может быть точным и неточным. В точном представлении разным элементам алгебры ставятся в соответствие разные операторы в гильбертовом пространстве.

Определение 43. Представление $\widehat{V} \rightarrow \widetilde{V}$ называется точным, если из $\widetilde{V} = 0$ следует $\widehat{V} = 0$.

Представление может быть нулевым.

Определение 44. Представление $\widehat{V} \rightarrow \widetilde{V}$ называется нулевым, если $\widetilde{V} = 0$ при любом \widehat{V} .

Определение 45. Представление $\hat{V} \rightarrow \tilde{V} \equiv \Pi(\hat{V})$ является прямой ортогональной суммой $\Pi(\hat{V}) = \Pi_1(\hat{V}) \oplus \Pi_2(\hat{V})$ двух (или большего числа) представлений, если операторы $\Pi(\hat{V})$ действуют в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ по правилу $\Pi(\hat{V})\hat{U} = \Pi_1(\hat{V})\hat{U}_1 + \Pi_2(\hat{V})\hat{U}_2$. Здесь $\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2$, $\hat{U}_1 \in \mathfrak{H}_1$, $\hat{U}_2 \in \mathfrak{H}_2$, а $\Pi_1(\hat{V})$ и $\Pi_2(\hat{V})$ — операторы представления в пространствах \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 соответственно.

Определение 46. Представление $\hat{V} \rightarrow \Pi(\hat{V})$ называется вырожденным, если оно представимо в виде прямой ортогональной суммы представлений, среди которых хотя бы одно является нулевым.

Определение 47. Представление $\hat{V} \rightarrow \Pi(\hat{V})$ называется неприводимым, если его нельзя представить в виде прямой ортогональной суммы двух других представлений.

Определение 48. Представление $\hat{V} \rightarrow \Pi(\hat{V})$, действующее в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} , называется циклическим, если в \mathfrak{H} существует вектор Φ (называемый циклическим) такой, что множество векторов $\Pi(\hat{V})\Phi$ всюду плотно в \mathfrak{H} .

Это эквивалентно тому, что с помощью конструкции $\Pi(\hat{V})\Phi$ можно построить базис в \mathfrak{H} .

Очевидно, что представление, построенное с помощью конструкции ГНС, является циклическим и невырожденным. Можно показать, что это представление неприводимо в том и только в том случае, когда состояние Ψ_0 чистое. В общем случае это представление не является точным. Однако существует так называемое универсальное представление $\hat{V} \rightarrow \Pi_u(\hat{V})$. Это представление является прямой суммой $\Pi_u(\hat{V}) = \bigoplus_i \Pi_i(\hat{V})$ представлений. Каждое представление $\hat{V} \rightarrow \Pi_i(\hat{V})$ строится по конструкции ГНС с состоянием Ψ_i . Суммирование ведется по всем алгебраическим состояниям Ψ_i .

Любое невырожденное представление C^* -алгебры изоморфно некоторому подпредставлению универсального представления. Универсальное представление является точным. Это значит, что алгебра элементов \hat{V} изоморфна алгебре операторов $\Pi_u(\hat{V})$. Иными словами, C^* -алгебра \mathfrak{A} изоморфна некоторой подалгебре ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве \mathfrak{H}_u . Для установления какого-либо алгебраического соотношения между элементами алгебры \mathfrak{A} достаточно установить соответствующие соотношения между операторами, реализующими ее любое точное представление. Наличие универсального представления гарантирует, что, по крайней мере, одно такое представление существует.

Ранее уже говорилось, что введенное здесь квантовое состояние является чистым алгебраическим состоянием. Теперь покажем, как могут быть построены функционалы, которые обладают нужными свойствами. Сначала рассмотрим случай, когда коммутативная алгебра Ω_ε , определяющая квантовое состояние, содержит одномерный проектор \hat{p}_0 . Нагляд-

нее всего одномерный проектор можно определить как такой элемент алгебры, которому в любом точном представлении соответствует оператор проектирования на одномерное гильбертово подпространство.

Замечание. В стандартном подходе к квантовой механике обычно считается, что любой ограниченный самосопряженный оператор соответствует некоторой наблюдаемой. В этом случае любая максимальная коммутативная подалгебра содержит одномерные проекторы. Наоборот, любой одномерный проектор принадлежит какой-нибудь коммутативной подалгебре. В такой ситуации рассматриваемый случай является общим.

Итак, пусть $\hat{p}_0 \in \Omega_\xi$. Рассмотрим точное представление алгебры \mathfrak{A} . В гильбертовом пространстве этого представления существует вектор $|\Phi_0\rangle$ такой, что $\hat{p}_0|\Phi_0\rangle = |\Phi_0\rangle$, $\langle\Phi_0|\Phi_0\rangle = 1$, $\hat{p}_0 = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|$. Рассмотрим выражение $\hat{p}_0\hat{C}\hat{p}_0 = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|\hat{C}|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0| \equiv \vartheta(\hat{C})|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|$, т. е.

$$\hat{p}_0\hat{C}\hat{p}_0 = \vartheta(\hat{C})\hat{p}_0 \tag{19}$$

для любого $\hat{C} \in \mathfrak{A}$.

Соотношение (19) — это соотношение между элементами алгебры \mathfrak{A} . Поэтому оно определяется только структурой алгебры \mathfrak{A} и не зависит от ее конкретного представления. В частности, от этого представления не зависит функционал $\vartheta(\hat{C})$. Легко убедиться, что $\vartheta(\hat{C})$ является алгебраическим состоянием на алгебре \mathfrak{A} . Линейность этого функционала следует из соотношения

$$\vartheta_0(\hat{C} + \hat{D})\hat{p}_0 = \hat{p}_0(\hat{C} + \hat{D})\hat{p}_0 = [\vartheta_0(\hat{C}) + \vartheta_0(\hat{D})]\hat{p}_0.$$

Положительность следует из соотношения $\hat{p}_0\hat{C}^*\hat{C}\hat{p}_0 = \vartheta_0(\hat{C}^*\hat{C})\hat{p}_0$. Так как операторы $\hat{p}_0\hat{C}^*\hat{C}\hat{p}_0$ и \hat{p}_0 положительны, то $\vartheta_0(\hat{C}^*\hat{C}) \geq 0$. Наконец, нормировка следует из соотношения $\vartheta_0(\hat{I})\hat{p}_0 = \hat{p}_0\hat{I}\hat{p}_0 = \hat{p}_0$. Кроме того, сужение функционала $\vartheta_0(\cdot)$ на подалгебру Ω_ξ является характером этой подалгебры. Действительно, пусть $\hat{B} \in \Omega_\xi$ и $\hat{C} \in \Omega_\xi$, тогда

$$\vartheta_0(\hat{B}\hat{C})\hat{p}_0 = \hat{p}_0\hat{B}\hat{C}\hat{p}_0 = \hat{p}_0\hat{B}\hat{p}_0\hat{p}_0\hat{C}\hat{p}_0 = \vartheta_0(\hat{B})\vartheta_0(\hat{C})\hat{p}_0.$$

Таким образом, функционал $\vartheta_0(\cdot)$ обладает свойством линейности и мультипликативности. Кроме того, $\vartheta_0(\cdot)$ положителен и удовлетворяет условию нормировки. Это как раз те условия, которые должны выполняться для функционала, описывающего квантовое состояние. Равенство (19) чисто алгебраическое. Поэтому значение функционала $\vartheta_0(\hat{C})$ зависит только от \hat{p}_0 (квантового состояния) и от \hat{C} как элемента алгебры \mathfrak{A} , но не от какой-нибудь частной коммутативной подалгебры (\hat{C} может принадлежать нескольким таким подалгебрам).

Покажем теперь, что справедливо обратное утверждение. Если квантовому состоянию Ψ_ξ^0 такому, что $\varphi_\xi(\hat{p}_0) = 1$, соответствует функционал $\Psi_\xi^0(\cdot)$, то $\Psi_\xi^0(\cdot) = \vartheta_0(\cdot)$. Действительно, из равенства (4) следует

$$\Psi_\xi^0(\hat{p}_0) = \Psi_\xi^0(\hat{I}) = 1. \quad (20)$$

Из неравенства Коши–Буняковского–Шварца (см. формулу (12)) получаем

$$\left| \Psi_\xi^0(\hat{C}(\hat{I} - \hat{p}_0)) \right|^2 \leq \Psi_\xi^0(C^* \hat{C}) \Psi_\xi^0(\hat{I} - \hat{p}_0).$$

Откуда, с учетом равенства (20), имеем

$$\Psi_\xi^0(\hat{C}) = \Psi_\xi^0(\hat{C}\hat{p}_0) = \Psi_\xi^0(\hat{p}_0\hat{C}). \quad (21)$$

Делая в (21) замену $\hat{C} \rightarrow (\hat{I} - \hat{p}_0)\hat{C}$, получаем

$$\Psi_\xi^0(\hat{C}) = \Psi_\xi^0(\hat{p}_0\hat{C}\hat{p}_0). \quad (22)$$

Воспользовавшись в правой части (22) формулой (19), приходим к равенству

$$\Psi_\xi^0(\hat{C}) = \Psi_\xi^0(\vartheta_0(\hat{C})\hat{p}_0) = \vartheta_0(\hat{C}). \quad (23)$$

Перейдем теперь к случаю, когда подалгебра Ω_ξ не содержит одномерных проекторов. В этой ситуации следует рассмотреть точное представление алгебры \mathfrak{A} . Пусть \mathfrak{H} — гильбертово пространство этого представления, а $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ — множество всех ограниченных линейных операторов в \mathfrak{H} . Можно считать, что \mathfrak{A} и Ω_ξ являются подалгебрами алгебры $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Пусть Ω'_ξ — максимальная действительная коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ такая, что $\Omega'_\xi \supset \Omega_\xi$. Рассмотрим множество всех проекторов, принадлежащих Ω'_ξ . Эти проекторы являются взаимно коммутирующими самосопряженными операторами в \mathfrak{H} с дискретными спектрами. В пространстве \mathfrak{H} существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этих операторов. Пусть $\{\hat{p}\}$ — множество проекторов на такие базисные векторы. Все эти проекторы одномерны, они принадлежат $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, но в рассматриваемом случае не принадлежат Ω_ξ . Каждый из проекторов $\hat{p}_i \in \{\hat{p}\}$ определяет линейный функционал $\vartheta_i(\cdot)$ на $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$: $\hat{p}_i \hat{B} \hat{p}_i = \vartheta_i(\hat{B}) \hat{p}_i$. Сужение этого функционала на алгебру \mathfrak{A} обладает всеми свойствами, необходимыми для описания соответствующего чистого квантового состояния.

6. ПРОБЛЕМА ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛЬНОСТИ

В знаменитой работе Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР) [28] были сформулированы принципы, которым, по мнению авторов, должна удовлетворять полная физическая теория: а) «каждый элемент физиче-

ской реальности должен иметь копию в полной физической теории»; б) «если без какого-либо возмущения системы мы можем с уверенностью (т. е. с вероятностью единица) предсказать значение физической величины, то, значит, существует элемент реальности, соответствующий этой величине».

Стандартная квантовая механика не восприняла этот тезис. Единичный эксперимент не имеет адекватной копии в математическом аппарате стандартной квантовой механики. Более того, прочно утвердилось мнение, что такой копии быть не может и даже не существует объективной физической реальности, которая определяет результат единичного эксперимента.

В пользу такого мнения приводятся достаточно веские аргументы. Пожалуй, наиболее известный основывается на неравенстве Белла [29, 30]. Белл вывел свое неравенство, рассуждая в рамках тезиса ЭПР. После Белла было предложено много вариантов аналогичных неравенств. Здесь мы рассмотрим вариант, предложенный в работе [31]. Этот вариант обычно обозначается аббревиатурой CHSH.

Пусть частица со спином 0 распадается на две частицы A и B со спинами $1/2$. Эти частицы разлетаются на большое расстояние и регистрируются приборами D_a и D_b соответственно. У частицы A прибор D_a измеряет проекцию спина на направление a , а у частицы B прибор D_b измеряет проекцию спина на направление b . Соответствующие наблюдаемые обозначим \hat{A}_a и \hat{B}_b , а результаты измерений A_a и B_b .

Предположим, что состояние исходной частицы характеризуется некоторой физической реальностью, которая может быть отмечена параметром ν . Этот же параметр будем использовать для описания физических реальностей, характеризующих продукты распада. Соответственно, результаты измерения наблюдаемых \hat{B}_a , \hat{C}_b можно рассматривать как функции $B_a(\nu)$, $C_b(\nu)$ параметра ν . Пусть распределение событий по параметру ν характеризуется вероятностной мерой $P(\nu)$, удовлетворяющей стандартным условиям

$$\int P(d\nu) = 1, \quad 0 \leq P(\nu) \leq 1.$$

Введем корреляционную функцию $E(a, b)$:

$$E(a, b) = \int P(d\nu) A_a(\nu) B_b(\nu) \tag{24}$$

— и рассмотрим комбинацию

$$\begin{aligned} N &= |E(a, b) - E(a, b')| + |E(a', b) + E(a', b')| = \\ &= \left| \int P(d\nu) A_a(\nu) [B_b(\nu) - B_{b'}(\nu)] \right| + \left| \int P(d\nu) A_{a'}(\nu) [B_b(\nu) + B_{b'}(\nu)] \right|. \end{aligned} \tag{25}$$

Для любых направлений a и b

$$A_a(\nu) = \pm 1/2, \quad B_b(\nu) = \pm 1/2. \quad (26)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} N &\leq \int P(d\nu) [|A_a(\nu)| |B_b(\nu) - B_{b'}(\nu)| + |A_{a'}(\nu)| |B_b(\nu) + B_{b'}(\nu)|] = \\ &= \frac{1}{2} \int P(d\nu) [|B_b(\nu) - B_{b'}(\nu)| + |B_b(\nu) + B_{b'}(\nu)|]. \end{aligned} \quad (27)$$

Благодаря равенствам (26) при любом ν одно из выражений

$$|B_b(\nu) - B_{b'}(\nu)|, \quad |B_b(\nu) + B_{b'}(\nu)| \quad (28)$$

равно нулю, а другое единице. Обратим внимание на то, что в обоих выражениях фигурирует одно и то же значение ν .

Учитывая свойство выражений (28), из неравенства (27) получается неравенство Белла (CHSH)

$$N \leq \frac{1}{2} \int P(d\nu) = \frac{1}{2}. \quad (29)$$

В стандартной квантовой механике корреляционная функция легко вычисляется, результат таков:

$$E(a, b) = -\frac{1}{4} \cos \theta_{ab},$$

где θ_{ab} — угол между направлениями a и b . Для направлений $a = 0$, $b = \pi/8$, $a' = \pi/4$, $b' = 3\pi/8$ получаем

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

что противоречит неравенству (29).

Результаты экспериментов согласуются с квантово-механическими расчетами и не подтверждают неравенство Белла. Обычно эти результаты рассматриваются как свидетельство того, что для квантово-механической системы нет никакой физической реальности, которая предопределяла бы результаты измерения.

Однако, с точки зрения современной теории вероятностей, приведенный вывод неравенства Белла слишком наивен. В этом выводе предполагается, что существует вероятностное распределение по параметру ν . По своему смыслу этот параметр маркирует элементарное событие. А как отмечалось ранее (см. разд. 4), элементарному событию далеко не всегда можно приписать какую-либо вероятность. Прежде чем говорить о вероятности, надо снабдить рассматриваемое множество элементарных событий структурой измеримого пространства. В связи с этим попытаемся повторить вывод неравенства Белла, используя в качестве параметра ν элементарное состояние φ .

По условию задачи начальная частица находится в определенном квантовом состоянии. Это значит, что в качестве пространства $\Omega(\varphi_\eta)$ элементарных событий φ мы должны рассмотреть класс эквивалентности $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$. То есть если наблюдаемая $\hat{A} \in \Omega_\eta$, то для всех $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ значение этой наблюдаемой будет одним и тем же. Элементарные состояния $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ различаются между собой за счет значений наблюдаемых $\hat{B} \notin \Omega_\eta$. Нетрудно убедиться, что благодаря такому различию множество $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ будет иметь мощность континуума. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим некоторую подалгебру $\Omega_\xi \neq \Omega_\eta$. Так как подалгебры Ω_ξ и Ω_η максимальны, то существует, по крайней мере, одна наблюдаемая \hat{B} такая, что $\hat{B} \in \Omega_\xi$ и $\hat{B} \notin \Omega_\eta$. Спектр такой наблюдаемой не может состоять из одной точки. Если такая точка λ одна, то спектральный радиус элемента $\hat{B} - \lambda\hat{I}$ равен нулю: $r(\hat{B} - \lambda\hat{I}) = 0$. Но для C^* -алгебры $\|\hat{B} - \lambda\hat{I}\| = r(\hat{B} - \lambda\hat{I})$. Значит, $\hat{B} = \lambda\hat{I} \in \Omega_\eta$. Отсюда следует, что существует, по крайней мере, два элементарных состояния $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$, различающихся значениями наблюдаемой \hat{B} . Те же рассуждения мы можем повторить для другой подалгебры $\Omega_\xi \neq \Omega_\eta$. Поскольку множество таких подалгебр Ω_ξ имеет мощность континуума, то и множество отличных друг от друга $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ будет также иметь мощность континуума.

Обратимся теперь к формуле (24) для корреляционной функции. Нам потребуются корреляционные функции для четырех комбинаций наблюдаемых: $\hat{A}_a\hat{B}_b$, $\hat{A}_a\hat{B}_{b'}$, $\hat{A}_{a'}\hat{B}_b$, $\hat{A}_{a'}\hat{B}_{b'}$. Интерес представляет вариант, когда направления a , a' , b , b' попарно не параллельны друг другу. В этом случае перечисленные наблюдаемые попарно несовместимы между собой. Поэтому для экспериментального нахождения корреляционных функций мы должны провести четыре отдельные серии экспериментов. В реальном случае каждая из этих серий состоит из конечного числа экспериментов, в идеальном — из счетного числа.

Таким образом, в эксперименте мы имеем дело не с единым пространством $\Omega(\varphi_{\varphi_\eta})$ элементарных событий, а с четырьмя отдельными случайными выборками из него. Обозначим их Ω_{ab} , $\Omega_{ab'}$, $\Omega_{a'b}$, $\Omega_{a'b'}$. Так как даже в идеальном случае эти выборки счетны, а пространство $\Omega(\varphi_{\varphi_\eta})$ имеет мощность континуума, то вероятность наличия общих элементов в этих выборках равна нулю. Кроме того, чтобы эти выборки стали измеримыми пространствами, нужно в них выбрать соответствующие σ -алгебры \mathcal{F}_{ab} , $\mathcal{F}_{ab'}$, $\mathcal{F}_{a'b}$, $\mathcal{F}_{a'b'}$. Эти подалгебры не только разные, но, как объяснялось в разд. 4, не могут быть подалгебрами одной σ -алгебры, которой соответствует некоторая вероятностная мера. То есть в каждой выборке должна быть своя вероятностная мера: P_{ab} , $P_{a'b}$, $P_{ab'}$, $P_{a'b'}$.

Таким образом, формула (24) теперь будет выглядеть следующим образом:

$$E(a, b) = \int_{\Omega_{ab}} P_{ab}(d\varphi)\varphi(\hat{A}_a\hat{B}_b),$$

а формула (25) так:

$$N = \left| \int_{\Omega_{ab}} P_{ab}(d\varphi) \varphi(\widehat{A}_a \widehat{B}_b) - \int_{\Omega_{ab'}} P_{ab'}(d\varphi) \varphi(\widehat{A}_a \widehat{B}_{b'}) \right| + \\ + \left| \int_{\Omega_{a'b}} P_{\widehat{A}_{a'} \widehat{B}_b}(d\varphi) \varphi(\widehat{A}_{a'} \widehat{B}_b) + \int_{\Omega_{a'b'}} P_{a'b'}(d\varphi) \varphi(\widehat{A}_{a'} \widehat{B}_{b'}) \right|. \quad (30)$$

Хотя в правой части во всех четырех слагаемых в формуле (30) использован один и тот же символ $d\varphi$, надо иметь в виду, что множества элементарных состояний, соответствующие $d\varphi$, будут разными. Они являются элементами разных σ -алгебр. Более того, равна нулю вероятность наличия в них общих элементов. Поэтому, во-первых, нельзя в формуле (30), как это сделано в правой части формулы (25), объединить интегралы, стоящие под знаком модуля, в один интеграл. Во-вторых, нельзя образовать пары, подобные тем, которые фигурируют в формуле (28). В свою очередь, это не позволяет доказать неравенство (29). Таким образом, если мы связываем понятие физической реальности с элементарным состоянием, то нарушение неравенства Белла ни в коей мере не доказывает противоречивости этого понятия.

Другим аргументом против использования понятия физической реальности в квантовой физике служит так называемая запрещающая теорема Кохена–Шпекера [32]. Смысл этой теоремы сводится к следующему. Рассмотрим в качестве физической системы частицу со спином единица. Пусть направления x , y , z взаимно ортогональны. Тогда наблюдаемые $\widehat{S}_x^2, \widehat{S}_y^2, \widehat{S}_z^2$, описывающие квадраты проекций спина на соответствующие направления, коммутируют между собой. Поэтому они совместимы и могут быть одновременно измерены. Предположим, что существует некоторая физическая реальность, которая однозначно предопределяет результат измерения по любому направлению. При измерении по одному из направлений должен получиться ноль, а по двум другим — единица. Зафиксируем одно из последних направлений и рассмотрим два направления (отличных от предыдущих), перпендикулярных ему и друг другу. По одному из этих направлений в результате измерения должен получиться ноль, по другому единица. Зафиксируем первое и повторим всю процедуру сначала. За конечное число таких шагов можно прийти к рассмотренному ранее направлению. При этом окажется, что если первоначально по этому направлению значение квадрата проекции спина равнялось нулю, то при возврате к этому направлению тот же квадрат должен равняться единице.

Из этого противоречия делается вывод, что не может существовать физической реальности, которая предопределяет результат измерения.

Однако в этом рассуждении полностью игнорируется проблема измеримости. Между тем здесь приходится иметь дело с двумя тройками направлений: x, y, z и x, y', z' . Внутри каждой из троек все направления взаимно ортогональны, но в разных тройках имеются неортогональные направления. Поэтому наблюдаемые $\hat{S}_x^2, \hat{S}_y^2, \hat{S}_z^2$ и $\hat{S}_x^2, \hat{S}_{y'}^2, \hat{S}_{z'}^2$ принадлежат разным коммутативным подалгебрам алгебры \mathfrak{A} . Соответственно, приборы, осуществляющие совместимые внутри каждой из троек измерения, относятся к разным типам. Эти приборы не обязательно должны давать один и тот же результат при измерении наблюдаемой \hat{S}_x^2 . При доказательстве теоремы это молчаливо предполагалось. Напомним, что элементарное состояние не фиксирует однозначно значения всех наблюдаемых. Оно однозначно фиксирует показания приборов *определенного типа*. Для разных типов эти показания могут быть разными.

Таким образом, в рамках предлагаемого подхода теорема Кохена–Шпекера не исключает возможности существования объективной физической реальности, связанной с элементарным состоянием.

7. ПАРАДОКСЫ

Критики стандартного формализма квантовой механики указали на большое количество ситуаций, в которых квантово-механические рассуждения приводят к парадоксальным результатам. В этом разделе мы обсудим только два, пожалуй, наиболее часто упоминаемых парадокса. Это парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена и парадокс кошки Шредингера. Надо сразу сказать, что наиболее ортодоксальные сторонники стандартного формализма утверждают, что никаких парадоксов не существует. Надо только грамотно использовать формулы квантовой механики. Поэтому, прежде чем обсуждать конкретные парадоксы, зафиксируем собственную позицию. Она состоит в следующем.

Формулы стандартного формализма квантовой механики, безусловно, справедливы в случае рассмотрения квантовых ансамблей. Они правильно описывают средние значения наблюдаемых величин и вероятности событий и в тех физических моделях, которые предлагаются авторами парадоксов. Поэтому интерес представляет обсуждение только одиночных явлений. Здесь возможны две позиции. По этому поводу см. обзор [33]. Во-первых, можно считать, что одиночные явления лежат вне компетенции квантовой механики. В этом случае предмет спора исчезает. Однако одиночные явления заведомо существуют. Поэтому возникает вопрос о полноте квантово-механического описания. Во-вторых, можно считать, что для одиночных явлений квантовая механика должна предсказывать только вероятности, и полнота описания исчерпывается предсказанием соответствующих вероятностей. В этом случае надо считать, что вероятность является некоторой самостоятельной сущностью этого единичного явления.

В современной математической теории вероятностей это не так. Напомним, что прежде чем ввести понятие о вероятностной мере, вводится понятие пространства элементарных событий. Соответственно, единичное явление (элементарное событие) рассматривается как элемент определенного множества (ансамбля). При этом одно и то же единичное явление можно рассматривать в качестве элемента разных множеств. В зависимости от этого множества одному и тому же явлению будут соответствовать разные вероятности или не будет соответствовать никакая вероятность.

Ортодоксальные сторонники стандартного формализма такую точку зрения отвергают и предпочитают считать вероятность фундаментальной неопределяемой сущностью единичного явления, которой в математическом аппарате квантовой механики соответствует либо вектор гильбертова пространства, либо матрица плотности. Формально так парадоксов удастся избежать, но при этом физическая сущность явлений остается за рамками обсуждения.

После этих предварительных замечаний приступим непосредственно к обсуждению парадоксов. Начнем с парадокса ЭПР. В оригинальной работе [28] этот парадокс рассматривался на примере измерения координаты и импульса. Более простую физическую модель предложил Бом [34]. В ней та же проблема обсуждается на примере измерений проекций спина на разные направления. Здесь мы остановимся на варианте, предложенном Бомом. В этом случае рассматривается та же физическая система, что и при обсуждении неравенства Белла.

Пусть частица со спином 0 распадается на две одинаковые частицы B и C со спинами $1/2$, которые разлетаются на большое расстояние. Спиновое состояние этой системы согласно формулам стандартного подхода описывается вектором состояния

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|B_z^{(+)}\rangle |C_z^{(-)}\rangle - |B_z^{(-)}\rangle |C_z^{(+)}\rangle \right], \quad (31)$$

где $|B_z^{(\pm)}\rangle$, $|C_z^{(\pm)}\rangle$ — собственные векторы операторов проекций спина на ось z с собственными значениями $+1/2$ и $-1/2$. Это так называемое запутанное состояние. В этом состоянии ни частица B , ни C не имеют определенного значения проекции спина на ось z . Спиновое состояние каждой из частиц может быть описано матрицей плотности. Например, для частицы B матрица плотности будет иметь вид

$$\rho(B) = \frac{1}{2} \left[|B_z^{(+)}\rangle \langle B_z^{(+)}| + |B_z^{(-)}\rangle \langle B_z^{(-)}| \right].$$

Эта матрица означает, что с вероятностью $1/2$ частица имеет проекцию спина $+1/2$ и такой же вероятностью — проекцию $-1/2$.

В момент, когда частицы B и C находятся в пространственноподобных областях, измерим у частицы C проекцию спина на ось z . Пусть результат будет $+1/2$. Тогда, согласно постулату о коллапсе квантового

состояния (проекционному принципу) состояние $|\Psi\rangle$ мгновенно заменится состоянием

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \hat{p}_+ |\Psi\rangle / \sqrt{\langle \Psi | \hat{p}_+ | \Psi \rangle}, \quad (32)$$

где \hat{p}_+ — проектор вида

$$\hat{p}_+ = \hat{I}_B \otimes |C_z^{(+)}\rangle\langle C_z^{(+)}|. \quad (33)$$

Здесь \hat{I}_B — единичный оператор в пространстве состояний частицы B .

Подставляя (33) в (32), получаем $|\tilde{\Psi}\rangle = -|B_z^{(-)}\rangle|C_z^{(+)}\rangle$. Матрица плотности частицы B , соответствующая этому состоянию, имеет вид $\tilde{\rho}(B) = |B_z^{(-)}\rangle|B_z^{(-)}\rangle$. Это значит, что при последующем измерении у частицы B проекции спина на ось z мы с вероятностью единица получим значение $-1/2$. Это совершенно верно описывает экспериментальную ситуацию. Таким образом, в качестве рецепта получения правильного результата проекционный принцип работает очень хорошо. Однако хотелось бы понять, какой *физический* механизм обеспечивает действенность этого рецепта.

Сразу напрашиваются два варианта такого механизма. Первый заключается в следующем. В момент распада частицы приобрели определенные проекции спина на ось z (противоположного знака), но до измерения проекции у частицы C мы не знаем, какие именно это проекции. Измерив проекцию у частицы C , мы автоматически узнали проекцию у частицы B . Но такое объяснение не согласуется с общей концепцией стандартного подхода к квантовой механике.

Дело в том, что то же квантовое состояние $|\Psi\rangle$ можно представить в виде

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|B_x^{(+)}\rangle|C_x^{(-)}\rangle - |B_x^{(-)}\rangle|C_x^{(+)}\rangle \right],$$

где обозначения те же, что в формуле (31), только вместо проекций на ось z фигурируют проекции на ось x . Теперь мы можем повторить все рассуждения, приведенные после формулы (31), заменяя в них ось z на ось x . В результате мы получим, что в момент распада частицы должны приобрести определенные значения проекций спина на ось x . Но наблюдаемые, соответствующие проекциям спина на оси z и x , взаимно несовместимы и согласно стандартному подходу не могут одновременно иметь определенные значения.

Второй вариант механизма выглядит так. После распада частицы B и C не приобрели определенных значений проекций спина ни на какую ось. В результате измерения проекции на определенную ось они такие значения проекций на эту ось приобрели. В то, что для частицы C , которая взаимодействовала с измерительным прибором, такой механизм возможен, поверить нетрудно. Но как такое измерение могло повлиять на частицу B , находящуюся в пространственноподобной области относительно измерительного прибора, представить нельзя, не нарушая

принципов теории относительности. Таким образом, оба варианта объяснения физического механизма оказываются несостоятельными. В этом и состоит парадокс.

Возражая против наличия парадокса, Бор в статье [35] писал, что при обсуждении системы, в которой существуют корреляции, нельзя ее рассматривать, как состоящую из двух независимых частей. Поэтому всякое измерение относительно одной части этой системы следует рассматривать как измерение в отношении всей системы. Это объяснение не представляется особенно убедительным. Дело в том, что существуют два типа корреляций, поддающихся рациональному объяснению. К первому типу относятся корреляции, которые обязаны своим происхождением взаимодействию между частями системы. В случае парадокса ЭПР такое взаимодействие должно было бы передаваться с сверхсветовой скоростью. Ко второму типу относятся корреляции, обусловленные какой-то связью между начальными условиями для рассматриваемых частиц. В случае парадокса ЭПР такая связь существует, так как частицы B и C возникли в результате распада одной первичной частицы. Однако наличия такой связи недостаточно для *однозначной* корреляции этих частиц в последующем. Для этого еще необходимо, чтобы начальные условия однозначно фиксировали последующую временную эволюцию этих частиц. А это значит, что уже сразу после рождения, еще до момента измерения, частицы B и C должны были обладать неким свойством, которое однозначно определяло бы результат измерения. Это противоречит общей концепции стандартной квантовой механики.

Конечно, можно предположить, что существует какой-то особый квантовый тип корреляций, который не поддается рациональному толкованию. Однако такое объяснение является, с точки зрения науки, наихудшим из всех возможных, так как основная задача научной теории — это сокращение числа не поддающихся рациональному толкованию истин.

Более удачными представляются рассуждения Фока [36]. Фок считал, что в квантовом случае понятию «состояние» не следует приписывать объективного смысла. Скорее, его следует понимать как «сведение о состоянии». При таком толковании парадокса действительно можно избежать. Но возникает вопрос: «Существует ли нечто объективное, о чем мы получаем эти сведения?».

В рамках предлагаемого в настоящей работе подхода такое «нечто» существует. Это элементарное состояние. Элементарное состояние является объективной характеристикой физической системы. Оно не зависит от каких-либо знаний о системе. В противоположность этому квантовое состояние, т.е. некоторый класс эквивалентности элементарных состояний, не является полностью объективной характеристикой физической системы. Это понятие является объективной характеристикой ансамбля физических систем. Определенную интересующую нас систему мы можем рассматривать в качестве элемента разных ансамблей (свобода выбора). Соответственно, она будет характеризоваться разными

квантовыми состояниями. Поэтому в квантовом состоянии присутствует субъективный фактор.

Обращаясь непосредственно к парадоксу ЭПР, можно ему дать следующую интерпретацию. Как до, так и после распада исходной частицы физическая система характеризуется стабильными (нулевыми) значениями наблюдаемых $\hat{S}_{\mathbf{n}}$ (проекция полного спина на направление \mathbf{n}). После распада значения наблюдаемых $\hat{B}_{\mathbf{n}}$ и $\hat{C}_{\mathbf{n}}$ (проекция спинов на направление \mathbf{n} для частиц B и C соответственно) удовлетворяют соотношению

$$B_{\mathbf{n}} + C_{\mathbf{n}} = S_{\mathbf{n}} = 0. \quad (34)$$

В принципе, каждая из наблюдаемых $\hat{B}_{\mathbf{n}}$ и $\hat{C}_{\mathbf{n}}$ могла бы быть нестабильной. Однако в случае двухуровневой системы, какой является частица со спином $1/2$, эти наблюдаемые будут стабильными. В элементарном состоянии несовместимые наблюдаемые могут одновременно иметь определенные значения. Только эти значения не могут быть одновременно измерены с помощью классического прибора. В конкретном эксперименте мы можем измерить наблюдаемую $\hat{C}_{\mathbf{n}}$ для любого, но только для одного, направления \mathbf{n} , так как для разных направлений \mathbf{n} и \mathbf{n}' наблюдаемые $\hat{C}_{\mathbf{n}}$ и $\hat{C}_{\mathbf{n}'}$ несовместимы. Благодаря равенству (34) при таком измерении мы автоматически определяем значение наблюдаемой $\hat{B}_{\mathbf{n}}$. Это так называемое косвенное измерение. Таким образом, в таком подходе парадокс ЭПР разрешается тривиально.

На примере этой физической системы можно дать вполне рациональную интерпретацию такому явлению, как коллапс квантового состояния. В рамках стандартного подхода это явление выглядит мистическим.

До измерения проекции спина у частицы C мы знаем, что наша физическая система находится в некотором элементарном состоянии, которое принадлежит классу эквивалентности, характеризуемому нулевыми значениями наблюдаемых $\hat{S}_{\mathbf{n}}$. То есть мы знаем, что система находится в синглетном квантовом состоянии, но мы не знаем, в каком конкретном элементарном состоянии она находится. После измерения наблюдаемой $\hat{C}_{\mathbf{n}}$ мы благодаря равенству (34) приобретаем знание не только о значении этой наблюдаемой, но и о значении наблюдаемой $\hat{B}_{\mathbf{n}}$. Поэтому теперь мы знаем, что после измерения рассматриваемая система будет находиться в элементарном состоянии, которое принадлежит классу эквивалентности, характеризуемому значениями $B_{\mathbf{n}} = -C_{\mathbf{n}}$ (значение $C_{\mathbf{n}}$ известно) наблюдаемых $\hat{B}_{\mathbf{n}}$ и $\hat{C}_{\mathbf{n}}$. Здесь мы считали, что измерение наблюдаемой $\hat{C}_{\mathbf{n}}$ было воспроизводимым. Теперь мы опять не знаем, в каком конкретном элементарном состоянии оказалась физическая система, но мы знаем, что она находится в определенном квантовом состоянии (типа $|\tilde{\Psi}\rangle$), формула (32)).

Благодаря взаимодействию с измерительным прибором значение наблюдаемых $\hat{C}_{\mathbf{n}'}$ для направлений $\mathbf{n}' \neq \mathbf{n}$ изменяется неконтролируемым

образом. Поэтому для таких направлений равенство (34) нарушается. Это соответствует тому, что рассматриваемая система перестает принадлежать синглетному состоянию. Таким образом, воспроизводятся все признаки коллапса квантового состояния. Заметим, что до измерения мы могли описать квантовое состояние частицы B с помощью матрицы плотности

$$\rho(B) = \frac{1}{2} \left[|B_{\mathbf{n}}^{(+)}\rangle\langle B_{\mathbf{n}}^{(+)}| + |B_{\mathbf{n}}^{(-)}\rangle\langle B_{\mathbf{n}}^{(-)}| \right], \quad (35)$$

а после измерения с помощью матрицы плотности

$$\tilde{\rho}(B) = | - C_{\mathbf{n}}\rangle\langle - C_{\mathbf{n}}|. \quad (36)$$

Хотя квантовое состояние (35) смешанное, а состояние (36) чистое, это не означает, что произошло какое-то изменение элементарного состояния частицы B . Просто мы приобрели дополнительную информацию об этом элементарном состоянии.

Равенству (34) можно дать еще такую полезную интерпретацию. Во время распада первичной частицы каждая из вторичных частиц производит «измерение» *элементарного состояния* своего партнера в смысле, что элементарное состояние одной из частиц является негативной копией элементарного состояния другой. Создание такой копии можно назвать измерением с помощью *квантового* прибора. Одна частица является квантовым измерительным прибором для другой. В отличие от измерения классическим прибором такое измерение может однозначно зафиксировать элементарное состояние измеряемой частицы. Однако чтобы результат такого «измерения» стал нам доступен, надо провести измерение с помощью классического прибора уже над этим квантовым прибором. В результате такого вторичного измерения мы получим знание только о классе эквивалентности, к которому принадлежит элементарное состояние измеряемой частицы.

Сценарий второго парадокса, который мы здесь обсудим, был предложен Шредингером [37] (по этому поводу см. также [38]). Сценарий выглядит следующим образом. В ящик помещается кошка и радиоактивный источник очень малой интенсивности. Когда в источнике происходит распад атома, срабатывает счетчик Гейгера. Импульс от счетчика подается через усилительное устройство на автомат, который разбивает ампулу с ядом. От яда кошка погибает. Наблюдатель не знает, произошел распад или нет. Поэтому по стандартным правилам квантовой механики он должен описывать состояние сложной системы (кошка плюс радиоактивный источник) вектором состояния, который является суперпозицией двух квантовых состояний: нераспавшийся атом и живая кошка плюс распавшийся атом и мертвая кошка. Суперпозиция живой и мертвой кошки выглядит, по меньшей мере, странной.

Существует утверждение, что парадокса не будет, если от описания состояния с помощью вектора гильбертова пространства перейти к описанию с помощью матрицы плотности. Однако здесь надо четко

договориться, в какую игру мы играем. Если мы считаем, что матрица плотности описывает ансамбль физических систем, то парадокса не будет. Но в этом случае мы будем описывать состояние не одной кошки, а ансамбля кошек, в котором одна часть кошек жива, а другая мертва. В этом случае каждая из кошек либо определенно жива, либо мертва, а вот то, с какой из кошек нам придется иметь дело, определяется теорией вероятностей. Но в сценарии парадокса Шредингера имеется в виду, что мы имеем дело с одной кошкой. В таком случае указанная трактовка матрицы плотности не годится. Если же мы считаем, что матрица плотности описывает состояние одной кошки, то представить смешанное состояние живой и мертвой кошки не проще, чем суперпозицию таких кошек.

Парадокса, конечно, не будет, если принять интерпретацию Фока. То есть считать, что под термином «состояние» в квантовой механике в действительности подразумевается наше знание об объективном состоянии физического объекта. Однако, во-первых, стандартная квантовая механика не приемлет такую точку зрения. Во-вторых, остается вопрос, существует ли такое объективное состояние.

В рамках концепции элементарного состояния парадокс опять-таки разрешается тривиально. Изучаемая пара (кошка плюс радиоактивный атом) находится в определенном элементарном состоянии. В данный момент времени в этом состоянии кошка либо определенно жива, либо определенно мертва. Никакого смешанного элементарного состояния живой и мертвой кошки нет. Квантовое состояние описывает класс эквивалентности таких элементарных состояний. Среди этих элементарных состояний имеются такие, которые соответствуют живой кошке в данный момент времени, а есть такие, которые соответствуют мертвой кошке в тот же момент времени.

Когда мы помещаем кошку в ящик, нам доступна информация только о классе эквивалентности, но не об индивидуальном элементарном состоянии. Класс эквивалентности фиксируется классически регистрируемыми условиями: в момент приготовления исследуемой системы кошка была жива, а атом не распался. С другой стороны, однозначная эволюция конкретной физической системы определяется именно ее элементарным состоянием. С помощью классических наблюдений это состояние не может быть однозначно зафиксировано.

8. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ СОСТОЯНИЕ И ОТО

Двадцатый век подарил человечеству две замечательные физические теории: квантовую механику и теорию относительности. Но отношения между этими теориями оказались не безоблачными. Специальную теорию относительности, хотя и не без проблем, удалось объединить с квантовой механикой. От этого союза родилось жизнеспособное дитя — квантовая теория поля. А вот общую теорию относительности (ОТО) с

квантовой механикой в гармоничный союз пока никак объединить не удается. Противоречия оказались слишком серьезными.

Вся ОТО пронизана духом локальности (см., например, [39]). Формально в квантовой теории поля аксиомы локальности и причинности также являются одними из основополагающих. Но одновременно с этим широко используется так называемый проекционный принцип [1], который очень плохо стыкуется со свойством локальности. Существуют многочисленные «доказательства» того, что локальность и причинность несовместимы с математическим аппаратом, используемым в квантовой механике.

Наиболее рельефно несогласованность математических аппаратов ОТО и квантовой механики проявляется в основном уравнении ОТО. Это уравнение связывает кривизну четырехмерного пространства-времени \mathcal{M} с тензором энергии-импульса (4-импульса) материи. Кривизна пространства \mathcal{M} является одним из основных понятий ОТО и описывается в терминах s -числовых функций. С другой стороны, тензор 4-импульса материи является важным понятием в квантовой теории и описывается в терминах операторов в гильбертовом пространстве, т. е. с помощью q -числовых функций. Поэтому при попытке прямого объединения ОТО с квантовой механикой мы были бы вынуждены приравнивать s -числовые и q -числовые функции. Это указывает на то, что без модернизации ОТО или квантовой теории или без того и другого одновременно обойтись не удастся.

В настоящее время в качестве основного направления гармонизации ОТО и квантовой теории выбрано квантование гравитационного поля. Уже построена математически очень красивая схема — так называемая супергравитация. Однако эта схема оказалась не без существенных недостатков. Например, никак не удается построить перенормируемую теорию гравитационного поля. И, что самое главное, супергравитация, как и любая суперсимметричная теория, предполагает существование суперпартнеров обычных частиц. Ничего похожего экспериментально обнаружено не было.

В используемом здесь подходе предлагается пойти в другом направлении. В предыдущих разделах мы отказались от принятого в стандартном подходе к квантовой механике фактического отождествления понятия «наблюдаемая» и «оператор в гильбертовом пространстве». Для классических наблюдаемых такое отождествление явно не подходит. Вместо этого было предложено воспользоваться алгебраическим подходом, в котором наблюдаемые рассматриваются как элементы некоторой алгебры без какой-либо ссылки на их представление в виде операторов. Такой подход пригоден как для квантовых, так и для классических наблюдаемых.

В предыдущих разделах соотношения между квантовыми и классическими системами описывались без учета общей теории относительности. Для учета ОТО основные положения должны быть несколько модифи-

цированы и дополнены. Дополним постулаты предыдущих разделов еще одним.

Постулат 11. Метрический тензор $g_{\mu\nu}(x)$ четырехмерного многообразия \mathfrak{M} является значением классической наблюдаемой $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$.

Многообразие \mathfrak{M} не является линейным пространством. Следуя Картану [40], четырехмерное нелинейное пространство \mathfrak{M} удобно представлять в виде гладкой четырехмерной поверхности в линейном пространстве \mathfrak{R} большей размерности. Однако никакого физического смысла пространству \mathfrak{R} мы приписывать не будем.

Наблюдаемые $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ являются компонентами ковариантного тензора. Этому тензору можно сопоставить контравариантный тензор с компонентами $\check{g}^{\mu\nu}(x)$. Часто между тензорами $\hat{g}^{\mu\nu}(x)$ и $\check{g}_{\mu\nu}(x)$ не делают принципиального различия и компоненты одного тензора выражают через компоненты другого. Хотя, с точки зрения математики, они являются элементами различных (взаимно сопряженных) пространств. У нас эти тензоры будут играть существенным образом различные роли. В то время как ковариантный тензор $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ описывает гравитационную наблюдаемую, контравариантный тензор $\check{g}^{\mu\nu}(x)$ никакой наблюдаемой не описывает. Он задает некоторое линейное отображение. Далее в качестве наблюдаемых, соответственно элементов C^* -алгебры, мы будем рассматривать ковариантные компоненты тензорных величин. Контравариантные компоненты будем использовать для построения линейных отображений, компонентов смешанных тензоров будем избегать. Операции интегрирования и дифференцирования по x также используются для построения линейных отображений.

Будем считать, что отображение $\check{g}^{\mu\nu}(x)$ действует на наблюдаемую $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ следующим образом:

$$\check{g}^{\mu\lambda}(x)\hat{g}_{\lambda\nu}(x) = \delta_{\nu}^{\mu}\hat{I}. \tag{37}$$

Здесь δ_{ν}^{μ} — символ Кронекера, а \hat{I} — единичный элемент алгебры наблюдаемых.

Наряду с наблюдаемыми $\hat{B}(x)$ часто приходится использовать их производные

$$\frac{\partial\hat{B}(x)}{\partial x^{\sigma}} = \partial_{\sigma}\hat{B}(x) \equiv \hat{B}_{,\sigma}(x), \quad \frac{\partial^2\hat{B}(x)}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\tau}} = \partial_{\sigma}\partial_{\tau}\hat{B}(x) \equiv \hat{B}_{,\sigma\tau}(x).$$

В ОТО, в общем случае, наблюдаемые $\hat{B}_{,\sigma}(x)$ и $\hat{B}_{,\sigma\tau}(x)$ не являются компонентами тензоров, т. е. при преобразовании координат они не преобразуются, как это положено тензорам. С другой стороны, относительно отображения $\check{g}^{\mu\nu}(x)$ они ведут себя как ковариантные компоненты тензоров. До сих пор в ОТО нет устоявшегося термина для таких величин. Мы будем использовать термин «паратензор» (якобы тензор). Настоящими

тензорами в ОТО являются так называемые ковариантные производные $\widehat{B}_{;\sigma}(x)$, $\widehat{B}_{;\sigma\tau}(x)$.

Продифференцировав обе части равенства (37) по x^σ , получим

$$(\check{g}^{\mu\lambda}_{;\sigma}(x)) \widehat{g}_{\lambda\nu}(x) = -\check{g}^{\mu\lambda}(x) (\widehat{g}_{\lambda\nu,\sigma}(x)).$$

Умножая обе части этого равенства на $\check{g}^{\nu\gamma}(x)$ и учитывая равенство (37), получим

$$\check{g}^{\mu\nu}_{;\sigma}(x) = -\check{g}^{\mu\lambda}(x) \widehat{g}_{\lambda\kappa,\sigma}(x) \check{g}^{\kappa\nu}(x).$$

Проделанная выкладка аналогична соответствующей выкладке в книге [41]. Мы только последовательно обращали внимание на различие между наблюдаемыми и линейными отображениями наблюдаемых.

В общей теории относительности большое внимание уделяется так называемому бескоординатному описанию физической системы. При таком описании между наблюдаемыми величинами устанавливаются соотношения, которые не зависят от частного выбора системы отсчета в четырехмерном пространстве-времени \mathfrak{M} .

В используемом нами подходе наблюдаемые — это элементы алгебры. То есть наблюдаемые — это величины, которые удовлетворяют определенным алгебраическим соотношениям. Эти соотношения, естественно, никак не зависят от выбора координат в пространстве \mathfrak{M} .

Другой важной характеристикой физической системы является элементарное состояние. Элементарное состояние сопоставляет каждой наблюдаемой ее значение, регистрируемое измерительным прибором. У физической системы, находящейся в определенном элементарном состоянии, разные измерительные приборы для одной и той же наблюдаемой могут зарегистрировать разные значения. Это аналогично тому, как в ОТО значения наблюдаемых могут зависеть от системы отсчета. Поэтому в нашем подходе систему отсчета мы будем отождествлять с некоторой системой классических измерительных приборов.

Как указывалось в разд. 3, в квантовом случае элементарное состояние — это бесконечный набор функционалов на множестве квантовых наблюдаемых. Этот набор фиксирует результаты измерения, полученные прибором любого типа. В этом смысле элементарное состояние не зависит от выбора измерительного прибора. В разд. 3 речь шла о наблюдаемых материи в отсутствие гравитационного поля. Теперь посмотрим, какие изменения следует сделать при учете гравитационного поля.

Эти изменения будут двоякого рода. Во-первых, появятся гравитационные наблюдаемые. Поэтому функционалы, характеризующие элементарные состояния рассматриваемой физической системы (или подсистемы), должны быть определены также и на гравитационных наблюдаемых. Во-вторых, значительно расширится набор приборов, которые могут быть использованы для измерения как гравитационных наблюдаемых, так и наблюдаемых материи. Теперь мы должны учитывать, что измерительный прибор может произвольным образом двигаться относительно изучаемой

физической системы. Каждому такому прибору (системе приборов) следует сопоставить в элементарном состоянии свой функционал. Таким образом, следует значительно расширить набор функционалов, составляющих каждое отдельное элементарное состояние. После включения таких функционалов в элементарное состояние последнее будет описывать результаты измерений при любой системе приборов. Это значит, что такое расширенное элементарное состояние не зависит от системы приборов. Поэтому можно считать, что элементарное состояние — это объективная физическая реальность, определяемая только исследуемой системой.

Другое дело — зарегистрированные значения наблюдаемых. Они зависят как от исследуемой системы, так и от системы измерительных приборов. Поэтому они не являются объективной характеристикой исследуемой системы. В связи с этим представляется неудачным общеупотребительное утверждение такого типа. Движущийся с большой постоянной скоростью объект испытывает лоренцево сокращение. Это утверждение порождает иллюзию того, что в движущемся объекте происходят какие-то объективные изменения. В действительности в самом объекте никакого изменения не происходит, просто он по-разному взаимодействует с измерительными приборами, которые движутся относительно него с разными скоростями.

Иными словами, размеры движущегося объекта не являются его объективной характеристикой. В связи с этим можно вспомнить о практически забытом термине *масса движения*, которая также не является объективной характеристикой. В противоположность этому *масса (масса покоя)* такой характеристикой является. В используемых здесь терминах можно сказать, что масса является стабильной наблюдаемой для физически реализуемых элементарных состояний исследуемой системы.

Стабильная наблюдаемая, как это определено в разд. 3, — это наблюдаемая, на которой различные функционалы, входящие в данное элементарное состояние, принимают одно и то же значение. Применительно к ОТО понятие стабильной наблюдаемой может быть расширено. В него можно включить все наблюдаемые, являющиеся тензорами. Конечно, результат измерения каждой компоненты тензорной наблюдаемой может зависеть от используемой системы измерительных приборов (от системы отсчета). Однако, зная значения всех компонент, найденных одним прибором, мы можем однозначно предсказать результат измерения этих компонент, если будем использовать другой прибор, связанный с первым соответствующим координатным преобразованием. В этом случае мы можем считать, что тензорная наблюдаемая, рассматриваемая как единое целое, является стабильной. Соответственно, можно считать, что значение такой наблюдаемой (совокупность значений всех ее компонент) является объективной реальностью.

Наблюдаемые, имеющие структуру паратензоров, мы не должны считать стабильными. Значения их компонент в одном и том же элемен-

тарном состоянии, найденные с помощью одной системы измерительных приборов, нельзя однозначно пересчитать в значения, которые могут быть найдены с помощью другой системы приборов. Если быть более точным, то такой пересчет возможен. Однако для его реализации необходима полная история перехода одной системы приборов в другую. Мы можем синхронизовать показания приборов в разных точках пространства \mathfrak{M} . Однако результат такой синхронизации может зависеть от пути, соединяющего эти точки.

9. ТЕНЗОРЫ 4-ИМПУЛЬСА

С помощью стандартной процедуры (см., например, [41, 42]) из метрического тензора и его производных можно построить другие основные гравитационные наблюдаемые: символы Кристоффеля

$$\hat{K}_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{\mu\nu,\sigma} + \hat{g}_{\mu\sigma,\nu} - \hat{g}_{\nu\sigma,\mu}),$$

тензор кривизны

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{\mu\sigma,\rho,\nu} - \hat{g}_{\nu\sigma,\rho,\mu} - \hat{g}_{\mu\rho,\sigma,\nu} + \hat{g}_{\nu\rho,\sigma,\mu}) + \\ + \check{g}^{\alpha\beta}(\hat{K}_{\alpha\mu\sigma}\hat{K}_{\beta\nu\rho} - \hat{K}_{\alpha\mu\rho}\hat{K}_{\beta\nu\sigma}), \end{aligned}$$

тензор Риччи

$$\hat{R}_{\nu\rho} = \check{g}^{\alpha\beta}\hat{R}_{\alpha\nu\rho\beta},$$

скалярную кривизну

$$\hat{R} = \check{g}^{\alpha\beta}\hat{R}_{\alpha\beta},$$

тензор Эйнштейна–Гильберта

$$\hat{G}_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}\left(\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\hat{R}\right)$$

и ковариантную производную вектора

$$\hat{B}_{\rho;\sigma} = \hat{B}_{\rho,\sigma} + \check{g}_{\mu\tau}\hat{K}_{\rho\sigma\mu}\hat{B}_{\tau}.$$

Согласно тождеству Бианки для этого тензора справедливо равенство

$$\hat{G}_{\mu\nu}{}^{;\nu}(x) = 0. \quad (38)$$

В силу принятого нами определения физической системы мы можем рассматривать некоторую область \mathcal{O} в пространстве \mathfrak{M} в совокупности с определенными на ней наблюдаемыми материи, гравитационными наблюдаемыми $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ и их первыми двумя производными в качестве некоторой физической системы. Из этой системы мы можем выделить две подсистемы. Элементами первой подсистемы являются точки области \mathcal{O} в совокупности с алгеброй гравитационных наблюдаемых. Эта алгебра

коммутативна и принадлежит центру алгебры, содержащей все наблюдаемые. Соответственно, эта подсистема будет классической.

Элементами второй подсистемы являются точки области \mathcal{O} в совокупности с алгеброй $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, генерируемой наблюдаемыми материи, определенными на точках $x \in \mathcal{O}$. В общем случае алгебра $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ некоммутативна. Соответственно, вторая подсистема будет квантовой. Чтобы не утяжелять терминологию, наблюдаемые, принадлежащие алгебрам $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, будем называть квантовыми. Хотя среди них могут оказаться наблюдаемые, принадлежащие центру алгебры \mathfrak{A} .

Первую подсистему будем называть гравитационным полем. Вторую подсистему естественно назвать материей. Эти две подсистемы взаимно открыты и взаимодействуют между собой. Основное уравнение ОТО как раз и призвано описать это взаимодействие. Внешне это уравнение выглядит чрезвычайно просто:

$$\widehat{G}_{\mu\nu}(x) = \widehat{T}_{\mu\nu}(x). \quad (39)$$

Здесь $\widehat{T}_{\mu\nu}(x)$ — тензор 4-импульса материи.

Основное уравнение ОТО, записанное в форме (39), — это уравнение, которое связывает наблюдаемые двух подсистем, локализованных в одной области \mathcal{O} . Если обе подсистемы описываются классическим образом, то уравнение (39) внутренне непротиворечиво. Однако оно оказывается противоречивым, если мы хотим описывать материю в терминах квантованных полей, а кривизну пространства-времени в классических терминах.

В квантовой теории поля тензор 4-импульса материи описывается в терминах операторнозначной обобщенной функции. Чтобы учесть этот факт, равенство (39) можно было бы переписать в виде

$$\int dx f(x) \widehat{G}_{\mu\nu}(x) = \int dx f(x) \widehat{T}_{\mu\nu}(x),$$

где $f(x)$ — произвольная достаточно хорошая (основная) функция. Однако этого недостаточно, так как в этом равенстве оператор приравнивается числу.

Как уже упоминалось в разд. 8, в настоящее время основные надежды на разрешение возникшего противоречия связываются с попытками проквантовать пространство-время. Но это требует новой революции в физике с очень неясным исходом. Однако можно попытаться обойтись без таких радикальных изменений.

Вспомним, что современная физика уже имеет опыт описания взаимодействия между квантовыми и классическими системами. Первое, что приходит на ум, это движение (рассеяние) квантовых частиц в классических полях. Однако в этом описании не учитывается обратное воздействие квантовых частиц на классические поля. Между тем имеется процесс, в котором такое воздействие является основной целью иссле-

дования. Таким процессом является взаимодействие квантовых частиц с классическим измерительным прибором. Можно попытаться воспользоваться приобретенным здесь опытом для того, чтобы снять противоречие, которое возникает при прямом использовании уравнения (39) в случае, когда материя описывается квантовым образом.

Будем рассматривать гравитационное поле, ассоциированное с областью \mathcal{O} , как классический измерительный прибор, предназначенный для измерения значения тензора 4-импульса материи, локализованной в этой области, соответственно, значение тензора $G_{\mu\nu}$ — как показание этого прибора. В этом случае уравнение (39) можно переписать в виде

$$\int dx f(x) G_{\mu\nu}(x) = \varphi \left(\int dx f(x) \hat{T}_{\mu\nu}(x) \right). \quad (40)$$

В левой части уравнения (40) $G_{\mu\nu}(x)$ следует рассматривать не как классическую наблюдаемую (тензор Эйнштейна–Гильберта), а как значение этой наблюдаемой в точке x . В правой части уравнения (40) стоит значение квантовой наблюдаемой (тензора 4-импульса) в элементарном состоянии φ . Это элементарное состояние, в котором находится рассматриваемая подсистема.

Уравнение (40) не надо путать с уравнением

$$G_{\mu\nu}(x) = \langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle, \quad (41)$$

которое широко используется в так называемой полуклассической теории (см., например, [43]).

В этой теории гравитационное поле считается классическим, а материальные поля трактуются квантовым образом. При этом тензор Эйнштейна–Гильберта $G_{\mu\nu}(x)$ связывается со средним значением $\hat{T}_{\mu\nu}(x)$ тензора энергии-импульса по некоторому квантовому состоянию. Уравнение (41) может быть получено с помощью вариационного принципа из определенного *эффективного действия*. В некоторых случаях такое эффективное действие может быть полезным.

Уравнение (41) пригодно для описания взаимодействия гравитационного поля с материальным объектом, который может рассматриваться как квантовый ансамбль некоторых более элементарных объектов. Для описания последних можно уже использовать квантовую теорию. Однако желательно иметь теорию, в которой материальные поля с самого начала последовательно описываются квантовым образом.

В отличие от уравнения (41) уравнение (40) пригодно для описания *индивидуального* события взаимодействия квантового объекта с гравитационным полем. Примером такого события является рождение нашей Вселенной. Вряд ли можно надеяться набрать статистику по таким событиям.

Имеется еще одно существенное отличие в уравнениях (40) и (41). Индивидуальное событие может произойти здесь и сейчас. Поэтому с

помощью уравнения (41) можно описывать локальные события. Для ОТО это очень важно. В случае уравнения (41) речь идет о средних значениях. Чтобы получить средние значения, надо набрать статистику. Для этого можно одновременно делать измерения в разных местах, можно делать измерения в одном месте, но в разные моменты времени. В любом случае мы лишаемся возможности локального описания физической системы.

В отличие от уравнения (39), уравнение (40) не является уравнением движения для наблюдаемых. В уравнении (40) наблюдаемые $\widehat{G}_{\mu\nu}(x)$ и $\widehat{T}_{\mu\nu}(x)$ можно считать независимыми. Уравнение (40) — это уравнение на элементарное состояние. Конечно, оно определяет элементарное состояние далеко не однозначно. Этому уравнению удовлетворяет целый класс эквивалентности в множестве элементарных состояний. Ситуация типичная для квантовых систем.

В стандартном подходе к квантовой механике обычно считается, что если в результате взаимодействия квантовой системы с классическим измерительным прибором регистрируется определенный результат для некоторой наблюдаемой, то после такого измерения квантовая система переходит в квантовое состояние, в котором эта наблюдаемая имеет зарегистрированное значение. Это утверждение даже закреплено в проекционном принципе [1]. Строго говоря, это не обязательно так. Измерительный прибор не обязательно одновременно является прибором, приготавливающим квантовое состояние. Однако в рассматриваемом случае это, скорее всего, реализуется.

Будем считать, что классическая подсистема (гравитационное поле) не просто измеряет значение квантовой наблюдаемой $\widehat{T}_{\mu\nu}(x)$, а одновременно приготавливает квантовое состояние с определенным значением этой наблюдаемой. Тогда обратное воздействие классической подсистемы на квантовую приведет к тому, что квантовая подсистема окажется в элементарном состоянии $\varphi = [\varphi_\xi]$, стабильном на наблюдаемой $\widehat{T}_{\mu\nu}(x)$. В этом случае в правой части уравнения (40) в качестве $\varphi(\cdot)$ можно взять функционал $\varphi_\xi(\cdot) \in \varphi$, который является характером любой из коммутативных подалгебр Ω_ξ , содержащей наблюдаемую $\widehat{T}_{\mu\nu}(x)$. Тогда результаты измерения классической наблюдаемой $\widehat{G}_{\mu\nu}(x)$ и квантовой наблюдаемой $\widehat{T}_{\mu\nu}(x)$ будут совпадать при использовании любых подходящих измерительных приборов. Это больше соответствует смыслу основного уравнения ОТО.

Если сделанное предположение справедливо, то это означает, что наблюдаемая $\widehat{T}_{\mu\nu}(x)$ является выделенной среди всех других наблюдаемых. Ее значение — физическая реальность, присущая квантовому объекту, и не зависит от прибора, используемого для ее измерения.

Если действительно значение тензора 4-импульса материи является физической реальностью, присущей квантовому объекту, то от записи

основного уравнения ОТО в виде (40) можно перейти (в терминах обобщенных функций) к виду

$$G_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x), \quad (42)$$

который обычно используется в ОТО. Нужно только иметь в виду, что теперь это уравнение связывает между собой не две наблюдаемые величины, а физически реализуемые численные значения этих величин.

Надо также учитывать, что в квантовом случае мы не можем экспериментально зафиксировать, в каком элементарном состоянии находится рассматриваемая нами квантовая система. Самое большее, что мы можем узнать, в каком квантовом состоянии она находится. Если это квантовое состояние является собственным состоянием наблюдаемой $\hat{T}_{\mu\nu}(x)$, то значение $T_{\mu\nu}(x)$ фиксируется однозначно. Именно с этим значением следует решать уравнение (42). Если же зафиксированное квантовое состояние не является собственным для наблюдаемой $\hat{T}_{\mu\nu}(x)$, то прежде чем воспользоваться уравнением (42), надо найти вероятность реализации каждого из значений наблюдаемой $\hat{T}_{\mu\nu}(x)$. После этого мы можем решать уравнение (42) для различных значений. Полученные решения будут описывать физическую реальность с найденными вероятностями.

Если материя описывается классически, то элементарное состояние определяется одним функционалом. Поэтому и в предлагаемом подходе уравнение (39) остается в силе. При этом можно считать, что уравнение (39) связывает две наблюдаемые. Но это будет справедливым только тогда, когда мы каждой из наблюдаемых сопоставляем функцию, значения которой совпадают с физически реализуемыми значениями данной наблюдаемой. То есть уравнение (39) остается в силе только в выделенном представлении наблюдаемых. Обычно это считается само собой разумеющимся, но это нельзя автоматически переносить на квантовый случай.

Поучительно подойти к выводу основного уравнения ОТО с другой стороны, воспользовавшись принципом стационарности действия. Будем исходить из следующей формулировки.

Реальная эволюция физической системы происходит так, что *значения* вариации действия равно нулю.

Обратим внимание на слово *значения*. Его часто опускают. У нас оно будет играть ключевую роль. Стандартным образом (см., например, [41]) будем считать, что действие \hat{S} физической системы складывается из двух частей — материальной части действия \hat{S}_m и гравитационной части \hat{S}_g :

$$\hat{S}_m = \int \hat{L}_m(x) \sqrt{-\hat{g}(x)} dx,$$

где $\widehat{g}(x)$ — детерминант метрического тензора, а $\widehat{L}_m(x)$ — скалярная функция квантовых наблюдаемых и отображения $\widehat{g}^{\mu\nu}$;

$$\widehat{S}_g = \frac{1}{16\pi} \int \widehat{L}(x) \sqrt{-\widehat{g}(x)} dx.$$

Обозначим через \widehat{q} квантовую наблюдаемую, которая играет роль обобщенной координаты. Гравитационное действие от \widehat{q} не зависит, поэтому при ее вариации будет изменяться только \widehat{S}_m . Соответственно, для нахождения значения вариации действия достаточно рассмотреть квантовую подсистему. Тогда из принципа стационарности действия будем иметь

$$\varphi_\xi(\delta_q \widehat{S}) = \varphi_\xi \left(\int \frac{\delta \widehat{L}_m(x) \sqrt{-\widehat{g}(x)}}{\delta \widehat{q}(x)} \delta \widehat{q}(x) dx \right) = 0. \tag{43}$$

Будем считать, что $\delta \widehat{q}(x) \neq 0$ только в малой области около некоторой точки y пространства \mathfrak{M} и принадлежит центру алгебры наблюдаемых. Учитывая, что $\varphi_\xi(\cdot)$ — линейный мультипликативный функционал, уравнение (43) можно переписать в виде

$$\varphi_\xi \left[\frac{\partial \widehat{L}_m(x) \sqrt{-\widehat{g}(x)}}{\partial \widehat{q}} - \left(\frac{\partial \widehat{L}_m(x) \sqrt{-\widehat{g}(x)}}{\partial \widehat{q}_{,\mu}} \right)_{,\mu} \right] = 0.$$

Если точка y не фиксирована, то для описания физически реализуемых элементарных состояний квантовой подсистемы допустимы все характеры $\varphi_\xi(\cdot)$, суженные на подалгебру квантовых наблюдаемых. В силу постулата 10 отсюда следует

$$\frac{\partial \widehat{L}_m(x) \sqrt{-\widehat{g}(x)}}{\partial \widehat{q}} - \left(\frac{\partial \widehat{L}_m(x) \sqrt{-\widehat{g}(x)}}{\partial \widehat{q}_{,\mu}} \right)_{,\mu} = 0. \tag{44}$$

Таким образом, из принципа стационарности действия для квантовых наблюдаемых получаются уравнения движения. В этих уравнениях гравитация выступает в роли внешнего классического поля, а гравитационные наблюдаемые представляются в виде их значений в рассматриваемом элементарном состоянии.

Рассмотрим вариацию $\delta \widehat{S}_m$ при преобразовании координат $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu$, где ζ^μ — малые величины. Так как \widehat{S}_m — скаляр, то вариация должна равняться нулю. Повторяя выкладки монографии [41], получим

$$\widehat{T}_{\mu\nu}{}^{;\nu}(x) = 0, \tag{45}$$

где

$$\widehat{T}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\widehat{g}}} \left[\left(\frac{\partial \widehat{L}_m \sqrt{-\widehat{g}}}{\partial \widehat{g}^{\mu\nu,\tau}} \right)^{\tau} - \frac{\partial \widehat{L}_m \sqrt{-\widehat{g}}}{\partial \widehat{g}^{\mu\nu}} \right]$$

— тензор 4-импульса материи.

Аналогичную выкладку можно проделать для вариации $\delta(\widehat{S}_m + \widehat{S}_g)$ и получить, что тензор полного 4-импульса $\widehat{\Theta}_{\mu\nu} = \widehat{T}_{\mu\nu} - \widehat{G}_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнению

$$\Theta_{\mu\nu}{}^{;\nu}(x) = 0. \quad (46)$$

Заметим, что у нас уравнение (46) не является следствием уравнения (40) и тождества Бианки (38). В частности, это связано с тем, что для некоммутирующих наблюдаемых элементарное состояние не обладает свойством линейности.

Рассмотрим вариацию $\delta(\widehat{S}_m + \widehat{S}_g)$ при варьировании гравитационной наблюдаемой $\widehat{g}_{\mu\nu}$. Теперь мы должны пользоваться принципом стационарности действия, т. е. считать что

$$\varphi(\delta(\widehat{S}_m + \widehat{S}_g)) = 0 \quad (47)$$

для физически реализуемого элементарного состояния φ .

В отличие от q - и c -чисел, для всех элементов C^* -алгебры определена операция сложения. Поэтому мы опять можем воспользоваться выкладками монографии [41]. Только надо учесть равенство (47) и тот факт, что тензор $\widehat{\Theta}_{\mu\nu}(x)$ является обобщенной функцией. В результате мы придем к уравнению

$$\varphi\left(\int dx f(x)\widehat{\Theta}_{\mu\nu}(x)\right) = 0, \quad (48)$$

которое совпадает с уравнением (40). Из этого уравнения следует, что тензор полного 4-импульса каждой области пространства \mathfrak{M} равен нулю. Так выглядит закон сохранения энергии и импульса в нашем подходе. Закон выполняется не только глобально, но и локально.

С другой стороны, если тензор полного 4-импульса определить как сумму тензора $\widehat{T}_{\mu\nu}(x)$ и паратензора 4-импульса $\widehat{t}_{\mu\nu}(x)$, то обычно приводимое доказательство сохранения такого полного 4-импульса не проходит в случае, когда $\widehat{T}_{\mu\nu}(x)$ является квантовой наблюдаемой. Вместо сохранения такого тензора можно доказать закон сохранения другого паратензора.

Введем паратензор

$$\widehat{Q}_{\mu\nu}(x) = -\widehat{t}_{\mu\nu}(x) - \widehat{G}_{\mu\nu}(x).$$

Этот тензор состоит только из гравитационных наблюдаемых, поэтому с ним можно обращаться, как с классической наблюдаемой. Тогда, повторяя выкладки из монографии [41], в которых тензор $\widehat{T}_{\mu\nu}(x)$ заменен на тензор $\widehat{G}_{\mu\nu}(x)$, получим

$$\left(\widehat{g}(x)\widehat{Q}_{\mu\nu}(x)\right)^{;\nu} = 0. \quad (49)$$

Это равенство выполняется тождественно. Поэтому оно справедливо для любого элементарного состояния. С другой стороны, так как $\hat{g}(x)\hat{Q}_{\mu\nu}(x)$ является паратензором, то его значение не определяется однозначно элементарным состоянием. В нашей терминологии эта наблюдаемая не является стабильной на физически реализуемом элементарном состоянии. Результат ее измерения зависит от используемого измерительного прибора. Примечательно то, что каждый фиксированный прибор не замечает эволюцию этой наблюдаемой во времени. В этом смысле эта наблюдаемая скрытая.

Разбиение тензора 4-импульса $-\hat{G}_{\mu\nu}(x)$ гравитационного поля на две части $\hat{Q}_{\mu\nu}(x)$ и $\hat{t}_{\mu\nu}(x)$ неоднозначно. Результат измерения каждой из этих частей не является объективной реальностью, а зависит от типа измерительного прибора. Это очень напоминает разбиение в термодинамике внутренней энергии на теплоту и работу. В нашем случае роль теплоты играет $\hat{Q}_{\mu\nu}(x)$, а роль работы $\hat{t}_{\mu\nu}(x)$.

10. ЭКСПЕРИМЕНТ С БЛУЖДАЮЩЕЙ КАПЛЕЙ

Введение понятия «элементарное состояние» позволяет с единых позиций рассматривать гравитационные и квантовые явления. Но прежде чем обсуждать квантовые эффекты, полезно рассмотреть очень любопытный классический эксперимент, который моделирует многие характерные особенности квантовых экспериментов. Имеется в виду эксперимент с блуждающей капелькой, выполненный группой французских исследователей [44, 45].

Эксперимент был организован следующим образом. Плоский резервуар, наполненный силиконовым маслом, подвергался вибрации в вертикальном направлении с характерным ускорением, большим ускорения силы тяжести. На поверхность силиконового масла падала капелька того же масла диаметром порядка 1 мм. За счет вибрации капелька отскакивала от поверхности, не слипаясь с основной массой масла. В таком подсакакивающем состоянии капелька могла существовать неопределенно долго.

При каждом ударе о поверхность капелька порождала поверхностную волну. Условия подбирались таким образом, чтобы при каждом падении капелька попадала на внешнюю ниспадающую сторону горба поверхностной волны, порожденной предыдущим падением капли. При отскоке от наклонной поверхности капля приобретала скорость как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях. В результате образовывалась сложная система, состоящая из поверхностной волны и когерентной с ней подпрыгивающей капли, передвигающейся в горизонтальном направлении. Эту систему авторы называли ходоком.

С ходоком были проведены эксперименты нескольких типов: отражение ходока от стенки, взаимодействие двух ходоков, дифракция ходока

на одной щели, интерференция ходока на двух щелях. Пожалуй, наиболее любопытным оказался эксперимент с интерференцией.

Этот эксперимент был организован следующим образом. Резервуар с маслом перегораживался полоской металла, лежащей на дне резервуара. Толщина слоя масла над полоской была настолько малой, что над ней поверхностная волна затухала. В результате передвижение в горизонтальном направлении подпрыгивающей капли над полоской прекращалось. Сделав в полоске два поперечных прохода шириной 8 мм с расстоянием между ними 15 мм, экспериментаторы организовали двухщелевой эксперимент с ходоком.

Во время эксперимента велась скоростная видеосъемка для постоянного наблюдения за каплей и поверхностной волной. С помощью этой съемки было установлено, что капля прошла через одну из щелей, а поверхностная волна через обе. За барьером обе части волны интерферировали между собой, а блуждающая капля взаимодействовала уже с результирующей волной и при движении в горизонтальном направлении отклонилась от перпендикуляра к перегородке на угол α . Этот угол измерялся, после чего эксперимент повторялся с самого начала с другой каплей.

При одинаковых начальных условиях у разных капель углы отклонения α сильно и, казалось бы, беспорядочно различались. Но самым удивительным оказался результат статистической обработки полученных данных. Этот результат отображен на рис. 1.

В этом рисунке легко узнать типичную интерференционную картину. С хорошей точностью она может быть фитирована рассеянием плоской волны на двух щелях. Хотя, конечно, капельки никакой физической волны не могли составлять, так как они существовали в различные

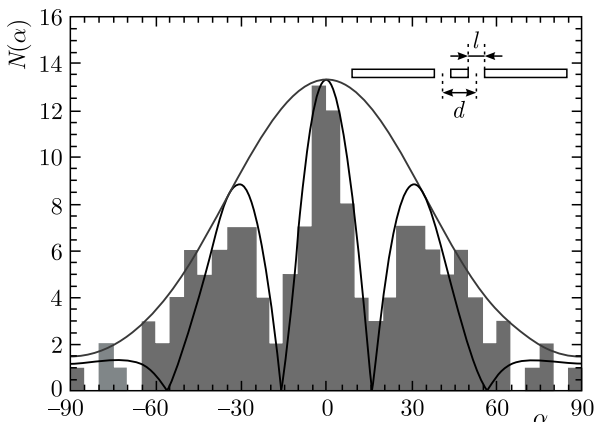


Рис. 1. Гистограмма, описывающая статистику прохождения подпрыгивающих капель масла через перегородку с двумя щелями

промежутки времени. Иными словами, в данном случае интерференционная картина — это чисто статистический эффект. Можно сказать, прыгающие капельки образуют волну вероятностей.

Распределение вероятностей самым существенным образом определяется видом ансамбля рассматриваемых событий. В данном случае экспериментаторы отбирали те события, в которых изначально капельки двигались перпендикулярно барьеру. Кроме того, экспериментаторы постарались выровнять вдоль барьера плотность числа капель, пересекающих щели.

В эксперименте с капелькой решающим фактором в возникновении волны вероятностей явился когерентный характер взаимодействия каждой из капель с сопровождающей ее поверхностной волной. В результате возникла сильно связанная система — ходок. Сильная связь проявилась в том, что именно взаимодействие капельки с поверхностной волной определило траекторию движения капельки в горизонтальном направлении.

Результаты этого эксперимента поразительным образом схожи с результатами соответствующих экспериментов в микромире, в частности, с рассеянием электрона на двух щелях. Это наводит на мысль — попытаться найти аналог ходока и в экспериментах с электроном. Используя эту аналогию, попытаемся модифицировать современную модель атома.

11. МЯГКИЕ И СУПЕРМЯГКИЕ ФОТОНЫ

Предшественницей современной модели атома является планетарная модель Резерфорда. Согласно этой модели электроны, подобно планетам, вращаются вокруг ядра, удерживаясь на орбите благодаря кулоновской силе притяжения к ядру. Модель Резерфорда очень наглядна. Однако по законам классической электродинамики, двигаясь по криволинейной орбите, электрон должен постоянно излучать энергию и очень быстро упасть на ядро. Этот недостаток модели Резерфорда удалось преодолеть Бору, который дополнил модель двумя постулатами.

Во-первых, электрон может вращаться вокруг ядра только по определенным стационарным орбитам. При этом он не излучает энергию. Во-вторых, под действием внешнего возмущения электрон может переходить с одной орбиты на другую. В этом случае он излучает или поглощает строго определенные порции энергии. В рамках такой модифицированной планетарной модели Бору удалось с хорошей точностью рассчитать допустимые энергетические уровни для атома водорода. Однако за это пришлось заплатить довольно высокую цену: модель в значительной мере потеряла наглядность, так как физически наглядного обоснования своим постулатам Бор не дал.

В модели Бора электрон рассматривался как точечная частица, движущаяся по определенным орбитам. Однако такая точечность электрона и определенность орбит стали непреодолимым препятствием на пути

дальнейшего развития модели атома. Поэтому на следующем этапе модификации модели было решено заменить понятие «частица» на «волновая функция», а «орбита» — на «орбиталь». На этом пути удалось достичь хорошего согласия результатов вычислений с большим количеством экспериментальных данных. Но модель практически полностью потеряла наглядность. В ней описание движения электрона заменено постулированием определенного уравнения эволюции векторов в гильбертовом пространстве. Модель из физической фактически превратилась в математическую.

Здесь мы постараемся вернуться к более физическому методу построения новых моделей. А именно, предлагается дать обзор различных физических явлений, попытаться найти в них общие черты. После этого предлагается экспериментально установленные закономерности в одном из сравниваемых явлений переносить на другое явление. Одновременно с этим предлагается подбирать математический аппарат, который подходил бы к описанию сравниваемых физических явлений.

Конкретно, мы будем сравнивать строение атома со строением Вселенной. Такое сравнение может оказаться весьма полезным. Вселенную мы можем экспериментально изучать изнутри, а атом снаружи. Кроме того, мы можем экспериментально исследовать промежуточные объекты — макроскопические тела и изучать их «сбоку». Полученные данные могут существенным образом дополнять друг друга.

Мы будем исходить из идеи, что фундаментальные свойства материи не зависят от масштаба изучаемого объекта. Руководствуясь этой идеей, мы попытаемся модифицировать модель Резерфорда–Бора.

По современным представлениям большая часть массы во Вселенной сосредоточена в темной материи и темной энергии. Но из чего состоят эти темная материя и темная энергия, в настоящий момент не установлено. Предлагаются самые разнообразные и часто весьма экзотические кандидаты на эти роли. Практически достаточно твердо установленным фактом можно считать только что ни та, ни другая современными измерительными приборами не регистрируются.

Вместе с тем в современной физике хорошо известны объекты, обладающие подходящими свойствами. Такими объектами являются мягкие и супермягкие фотоны. Наличие нерегистрируемых мягких фотонов необходимо для непротиворечивого описания хорошо изученного процесса упругого рассеяния электрона на ядре. При вычислении в рамках теории возмущений поперечного сечения этого процесса появляются инфракрасные расходимости. Для преодоления этой трудности в квантовой теории поля разработан очень эффективный метод.

Метод заключается в следующем (см., например, [46]). Экспериментально процесс упругого рассеяния (рис. 2, а) неотделим от процесса рассеяния электрона с испусканием мягких тормозных фотонов (рис. 2, б), если энергия этих фотонов ниже порога чувствительности используемых приборов. При учете этого процесса инфракрасные расходимости ком-

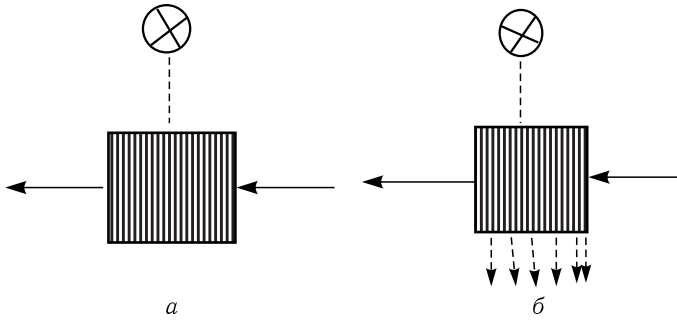


Рис. 2. Диаграммы Фейнмана, описывающие упругое рассеяние электрона (а) и тормозное излучение (б). Сплошные стрелки изображают электроны, штриховые — фотоны

пенсируются. С ростом порядка теории возмущений число учитываемых тормозных фотонов следует увеличивать.

Таким образом, хотя нам кажется, что из области рассеяния вылетает один электрон, в действительности вылетает электрон, окруженный облаком мягких фотонов. Эти фотоны не виртуальные, а вполне реальные. Аналогичная ситуация имеет место и в других процессах. При каждом акте рассеяния часть энергии рассеивающихся частиц тратится на рождение тормозных фотонов, которых становится все больше, а энергия каждого из них в среднем — все меньше. В обычных условиях такого типа процессы являются доминирующими. Они вполне согласуются с вторым началом термодинамики.

В результате таких процессов мягких и супермягких фотонов должно образоваться очень много, и они вполне подходят на роли темной материи и темной энергии. В принципе, возможно в темных энергии и материи присутствие и других компонент, но мы сосредоточим внимание на вкладе именно мягких и супермягких фотонов. Далее такие фотоны будем называть темными. Конкретные значения требуемых частот указанных фотонов, конечно, условны и могут зависеть от рассматриваемой задачи. В качестве верхней границы можно принять $\omega = 10^{-3}$ Гц (условная нижняя граница наблюдаемых радиочастот).

Темные фотоны могут выступать и в роли инструмента термализации рассматриваемой системы. Поясним последнее простым классическим примером. Пусть мы изучаем термодинамические свойства газа в сосуде. Часто такой газ можно рассматривать как идеальный и считать, что молекулы газа не взаимодействуют между собой и упруго отражаются от стенок сосуда. Но для объяснения причины возникновения термодинамического равновесия в газе мы должны считать, что молекулы этого идеального газа в действительности скрытно для нас взаимодействуют между собой и со стенками сосуда.

В каждом конкретном процессе тормозных фотонов образуется очень много, а уносят они очень небольшую порцию энергии. Поэтому следует ожидать, что они должны хорошо описываться классической электродинамикой. Но в классической электродинамике энергия переносится электромагнитными волнами. С другой стороны, всякая волна является относительно устойчивым и упорядоченным объектом. Поэтому если мы хотим описывать этот ансамбль фотонов в рамках квантовой теории, то следует считать, что они находятся в когерентном состоянии.

В настоящее время теория квантовых когерентных состояний хорошо разработана (см. работы Глаубера [47, 48]). В формализме Глаубера векторный потенциал электромагнитного поля \hat{A} представляется оператором в гильбертовом пространстве, который раскладывается по функциям мод \mathbf{u}_k

$$\hat{A}(\mathbf{r}t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} [b_k^- \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + b_k^+ \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{+i\omega_k t}].$$

Здесь индекс k — это мультииндекс, определяемый как проекциями волнового вектора \mathbf{k} , так и поляризацией волны \mathbf{u}_k . Так как с дискретными индексами работать значительно удобнее, чем с непрерывными, считается, что система занимает большой, но конечный объем. Функции \mathbf{u}_k являются решениями волнового уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{u}_k + \omega_k^2 \mathbf{u}_k = 0$$

с соответствующими граничными условиями, образуют полный ортонормированный набор и удовлетворяют требованию поперечности.

Квантово-механические свойства \hat{A} полностью фиксируются, постулируя, что операторы b_k^\pm удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям

$$[b_k^-, b_{k'}^+] = \delta_{kk'}, \quad [b_k^\pm, b_{k'}^\pm] = 0.$$

После этого каждую моду можно рассматривать отдельно.

Состояние электромагнитного поля в формализме Глаубера описывается в терминах когерентных состояний $|\beta_k\rangle$, которые удовлетворяют соотношению

$$b_k^- |\beta_k\rangle = \beta_k |\beta_k\rangle,$$

где β_k — комплексное число $\beta_k = |\beta_k| \exp(i\varphi_k)$.

Состояние $|\beta_k\rangle$ можно рассматривать как вектор гильбертова пространства, представляющий маркированную волну, для которой $|\beta_k|$ — параметр, характеризующий амплитуду волны, а φ_k — параметр, характеризующий положение некоторого маркера, фиксирующего фазу волны.

Простым наглядным примером маркированной волны является волна на поверхности воды, в которой плавает поплавок. Этот поплавок можно рассматривать как маркер, отмечающий в каждый момент времени неко-

тору фазу волны. Характерным свойством поплавка является то, что он движется когерентно волне.

Возвращаясь к рассмотренному процессу рассеяния электрона на ядре, сопровождающегося излучением мягких фотонов, можно заметить очень большое сходство с этим примером. Особенно если мы будем считать, что электрон движется когерентно волне мягких фотонов. Так как рассеянный электрон и мягкие тормозные фотоны рождаются в едином физическом процессе, то такое предположение выглядит совершенно естественным.

Если введенный вектор \mathbf{k} связать с импульсом электрона ($\mathbf{k}\hbar$ — импульс электрона), то в маркированной волне легко узнать волну де Бройля. Надо сказать, что сам де Бройль не утверждал, что квантовая частица является волной. Он утверждал (см., например, [49]), что с частицей *связана* волна с частотой ω_k . Кстати, такое утверждение физически гораздо более естественно, чем утверждение, что электрон одновременно является и волной, и частицей. Конечно, все рассуждения можно повторить, рассматривая рассеяние наблюдаемого фотона на ядре. В этом случае мы приходим к маркированной волне, в которой маркером будет служить наблюдаемый фотон.

Мы хотим найти общие черты в строении атома и Вселенной. Заранее известно, что в строении атома большую роль играют электромагнитные силы и квантовые явления. В строении Вселенной электромагнитные силы также играют большую роль. Кроме того, колоссальную роль играет гравитация. Поэтому крайне желательно электромагнитные силы, квантовые явления и гравитацию рассматривать с единых позиций.

Как отмечалось ранее, алгебраический подход позволяет дать такое рассмотрение. Напомним, что в нем автоматически возникает правило Борна. На это правило можно посмотреть и с такой точки зрения. Правило Борна отражает экспериментальную ситуацию в квантовых процессах. При взаимодействии квантовых систем с классическими приборами, осуществляющими воспроизводимое измерение квантовых наблюдаемых, квантовая система автоматически переходит в соответствующее квантовое состояние, в котором распределение значений квантовых наблюдаемых подчиняется правилу Борна.

Здесь ситуация очень похожа на ту, которая имеет место в термодинамике. Нулевое начало термодинамики гласит (см., например, [50]): «Для каждой термодинамической системы существует состояние термодинамического равновесия, которого она при фиксированных внешних условиях с течением времени самопроизвольно достигает». Достаточно заменить определение «термодинамический» на «квантовый» и слова «фиксированные внешние условия» на «воспроизводимые измерения квантовых наблюдаемых».

Это означает, что квантовые состояния обладают некоторым выделенным свойством — квантовой равновесностью, можно сказать — устойчивостью. Поэтому мы можем считать, что постулат 10 (QM) (см. разд. 5)

отражает свойство устойчивости ансамблей, соответствующих классам эквивалентности. Иначе можно сказать, что среднее значение наблюдаемой \widehat{B} , которое удовлетворяет соотношению (50)

$$\Psi_{\varphi_\eta}(\widehat{B})\widetilde{p}_{\varphi_\eta} = \widetilde{p}_{\varphi_\eta}\widetilde{B}\widetilde{p}_{\varphi_\eta}, \quad (50)$$

соответствует устойчивому квантовому распределению.

В (50) $\widetilde{p}_{\varphi_\eta}$ — некоторый одномерный проектор в гильбертовом пространстве, в котором реализуется точное представление алгебры, а \widetilde{B} — оператор в этом представлении, соответствующий \widehat{B} .

Наличие у квантовых систем несовместимых наблюдаемых существенным образом влияет на процедуру описания динамики таких систем. Динамика классической системы в идеальном случае может быть описана уравнениями Ньютона. Это означает, что для описания такой системы достаточно знать все силы, которые действуют в системе, и полный набор граничных условий. Начальные условия можно рассматривать как составную часть этого набора. Конечно, для реальных систем такой полный набор знать невозможно. Всегда будут неконтролируемые возмущения, и, строго говоря, необходимо исследовать устойчивость движения относительно этих возмущений.

Для квантовых систем ситуация усугубляется. Даже в идеальном случае нельзя установить полный набор граничных (начальных) условий, так как любой набор измерительных приборов может зафиксировать только совокупность совместимых наблюдаемых. Поэтому вопрос устойчивости движения становится принципиально важным. В действительности, при формулировке законов динамики квантовых систем отцы-основатели квантовой механики проблемой устойчивости движения специально не занимались, но удачно пошли по пути использования не ньютоновской механики, а гамильтонова формализма. В этом формализме гамильтониан и действие играют центральную роль. В преломлении к алгебраическому подходу это означает, что эти величины должны входить в алгебру наблюдаемых.

Надо отметить, что и для классических систем далеко не всегда применим ньютоновский формализм. Простейшим примером является газ в термостате. Ясно, что совершенно безнадежно пытаться описывать динамику этой системы в терминах сил взаимодействия между молекулами газа и стенками термостата и между собой. С другой стороны, эта система вполне успешно описывается в терминах температуры и давления при условии установления равновесного распределения в газе. В этом случае в качестве наблюдаемых следует рассматривать температуру и давление. Вместе с тем при очень малом количестве молекул вполне применим ньютоновский формализм, в котором силы рассматриваются в качестве наблюдаемых. Но в этом случае условие равновесного распределения будет нереалистично.

Таким образом, вопрос о том, какие величины должны включаться в множество наблюдаемых, не всегда имеет однозначный ответ. Это множество может зависеть от способа описания системы, в первую очередь от приближения, которое используется. Алгебраический подход удобен своей гибкостью. Он позволяет различным образом выбирать учитываемые наблюдаемые и различным образом группировать их в исследуемые ансамбли.

12. ФОТОННЫЙ БОЗЕ-КОНДЕНСАТ И МОДЕЛЬ ПРОТОНА

В модели Резерфорда–Бора ядро атома рассматривалось как бесструктурный силовой центр, сейчас твердо установлено, что ядро имеет сложную внутреннюю структуру. Поэтому прежде чем строить модель атома, попытаемся построить модель простейшего ядра — протона.

Согласно принятой сейчас Стандартной модели протон состоит из валентных и морских кварков, взаимодействующих между собой через глюоны. Мы не будем искать различия между валентными и морскими кварками и объединим их в одну группу. Эти кварки не виртуальные, но говорить об их массе надо с очень большой осторожностью, так как они участвуют в сильном взаимодействии, а понятие массы строго определено только для свободных частиц.

Между прочим, заметим, что виртуальные частицы являются не физическими, а математическими объектами, удобными для визуализации ряда теории возмущений и не более того. Поэтому наделять их какими-то физическими свойствами надо с еще большей осторожностью.

Кварки являются фермионами и не могут образовать конденсата сколь угодно высокой плотности. Для фотонов такое ограничение отсутствует. Фотоны, в принципе, могут образовывать структуру любой плотности. В частности, они могут образовывать бозе-конденсат.

Учитывая эти факты, можно предложить вполне правдоподобную планетарную модель протона. Планетарную не в смысле Резерфорда, а в смысле структуры отдельной планеты. Протон, подобно планете, состоит из нескольких сферических слоев, плотность которых, в согласии с законом Архимеда, уменьшается при движении от центра к периферии.

В центре протона находится ядро, в котором сосредоточена основная масса протона. Ядро имеет вид бозе-конденсата темных фотонов. Далее идет мантия, состоящая из неконденсированных темных фотонов. Потом идет кора, состоящая из взвеси кварков и глюонов в море фотонов. На самой периферии располагается атмосфера, состоящая из темных фотонов, но с плотностью, меньшей плотности коры.

Многokrатно предпринимались безрезультатные попытки наблюдения бозе-конденсата фотонов. Наконец, одна из них увенчалась успехом (см. [51, 52]).

Чтобы облегчить локализацию фотонов в микрополости, авторы эксперимента использовали в качестве стенок полости немного изогнутые

зеркала. Из-за конечного искривления стен полости фотоны концентрировались в геометрическом центре полости. Фотоны между собой взаимодействуют очень слабо. Поэтому чтобы получить термодинамически уравновешенный ансамбль фотонов, авторы заполнили полость жидкой органической краской. Равновесие было получено за счет баланса между процессами поглощения и переизлучения фотонов молекулами краски. Для увеличения количества фотонов в полости использовалась лазерная подкачка. При достижении некоторой критической (для заданной температуры) плотности в ансамбле фотонов происходил фазовый переход в состояние бозе-конденсата. Этот переход наблюдался визуально: размытое фотонное «облако» преобразовывалось в яркое узкое пятно. То есть отличительной особенностью этого фазового перехода явилось резкое изменение отражательных свойств множества фотонов, сосредоточенных в центре полости.

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда рассматриваемая микрополость заполнена очень большим количеством очень мягких фотонов. В этом случае легко установить физическую причину такого фазового перехода.

При очень высокой концентрации мягких фотонов может пойти процесс, изображенный на рис. 3. Этот процесс, в некотором смысле, является обратным процессу, изображенному на рис. 2, б. В процессе рис. 3 происходит столкновение большого числа мягких фотонов и рождается некоторое количество частиц (на рисунке они изображены сплошными стрелками), среди которых имеются достаточно энергичные.

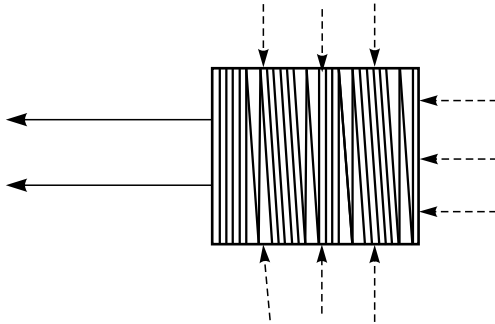


Рис. 3. Диаграммы Фейнмана, описывающие процесс концентрации энергии

Внутри полости фотоны будут взаимодействовать между собой. Пусть ω — характерная частота фотонов и $\hbar\omega/mc^2$, где m — масса электрона. Тогда вычисление сечения рассеяния фотона на фотоне дает (см. [53])

$$\sigma = 0,031\alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^6, \quad (51)$$

где α — постоянная тонкой структуры, а r_e — так называемый классический радиус электрона:

$$r_e = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Благодаря множителю $(\hbar\omega/mc^2)^6$ в формуле (51), если в полость попадет фотон с частотой, большей ω , процесс, изображенный на рис. 3, становится более вероятным. В этом процессе опять рождаются фотоны с частотой, большей ω . То есть мы получим вероятностный процесс с положительной обратной связью, что характерно для фазового перехода.

Конечно, при $\hbar\omega/mc^2$ сечение, задаваемое формулой (51), будет очень мало, но при очень большой концентрации фотонов описанный процесс может привести к развитию цепной реакции, следствием которой будет излучение, наблюдаемое в эксперименте с фотонным бозе-конденсатом. Это излучение назовем «конденсационным».

Для начала цепной реакции нужно, чтобы начальное возмущение было достаточно сильным. Это объясняет, почему в наблюдаемом случае потребовалась термализация ансамбля фотонов. В таком ансамбле появляются фотоны достаточно высокой энергии.

Детали описываемого фазового перехода в данный момент нас не интересуют. Поэтому ограничимся самым общим утверждением. Данный переход идет с соблюдением закона сохранения энергии. Иными словами, для этого перехода справедливо первое начало термодинамики. Со вторым началом термодинамики этот переход не согласуется, так как в нем идет не диссипация энергии, а ее концентрация.

Но второе начало термодинамики не следует из фундаментальных законов физики. Оно является заключением, сделанным на основании наблюдения физических систем с не очень высокой концентрацией материи. Экспериментальных данных при очень высокой концентрации материи до настоящего времени просто не было.

Теперь вернемся к нашей планетарной модели протона. Нетрудно заметить, что в этой модели структура протона очень похожа на структуру полости в эксперименте, описанном в статьях [51, 52]. Там полость ограничена искривленными зеркалами, которые предназначены для концентрации фотонов в центре полости. В протоне в качестве сферического зеркала могут выступать кварки, которые сосредоточены в коре. Зеркало не очень совершенное, так как рассеяние происходит не только в сторону центра протона, но и к периферии. И в эксперименте с бозе-конденсатом зеркало также не было совершенным. Поэтому потребовалась лазерная фотонная подпитка.

В протоне такую подпитку реализует сильное гравитационное поле, благодаря которому фотоны, находящиеся в мантии и коре, концентрируются в области около ядра протона. Гравитационное поле также действует на кварки. Однако кварки являются фермионами, и их концентрация в ограниченной полости не может быть слишком высокой.

Кроме того, кварки имеют электрический заряд. Поэтому благодаря электромагнитному взаимодействию они достаточно сильно взаимодействуют с конденсационным излучением, которое будет их отгонять от центра. В результате кварки и сильно взаимодействующие с ними глюоны не могут сконцентрироваться в районе ядра протона, а сформируют кору. Таким образом, гравитация концентрирует в центре именно фотоны, плотность которых может сделаться предельно высокой. Иными словами, в районе ядра создаются предпосылки для возникновения черной микродыры.

Таким образом, в случае ядра протона мы как раз имеем дело с очень высокой концентрацией. Соответственно, справедливость второго начала термодинамики в данном случае становится не ясной. В протоне после отражения в кварковом зеркале фотон может потерять энергию, а может и приобрести. То есть зеркало осуществляет термализацию фотонов, находящихся в мантии, и исполняет роль молекул краски.

Иными словами, все механизмы, которые упомянуты в статьях [51, 52], действуют и в протоне. Поэтому следует ожидать, что результат будет такой же. То есть ядро протона будет являться источником конденсационного излучения. Интенсивность этого излучения будет тем больше, чем больше фотонов поступает в ядро протона из окружающей среды. В этом случае мы получаем вероятностный процесс с отрицательной обратной связью. Такие процессы приводят к устойчивому динамическому равновесию.

Одновременно с этим конденсационное излучение позволяет избежать очень большой неприятности в физической интерпретации рассматриваемых процессов. Вместо исчезновения материи в так называемой сингулярной точке (в черной микродыре) мы будем иметь дело с преобразованием формы энергии материи. Энергия переходит из менее концентрированной формы в более концентрированную.

Надо сказать, что само понятие «сингулярная точка» не является физическим, это всего лишь математическая абстракция. Однако в рассматриваемом случае это математическое понятие вполне можно заменить физическим — «фотонный бозе-конденсат».

Теперь попытаемся сделать некоторые численные оценки. Будем рассматривать протон как маленькую Вселенную и воспользуемся уравнениями Фридмана с Λ -членом (см., например, [54]):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{4\pi G}{3} (\rho + \rho_\Lambda) - \frac{kc^2}{2a^2}, \quad (52)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} - 2\rho_\Lambda \right). \quad (53)$$

Здесь a — размерный масштабный фактор (в нашем случае — расстояние от центра ядра протона); G — гравитационная константа; ρ и P — плотность и давление наблюдаемой материи; c — скорость света; k —

параметр кривизны (в нашем случае $k = 1$); ρ_Λ — Λ -член. Последний мы не будем связывать с нулевыми колебаниями вакуума, а свяжем с выталкивающей силой Архимеда и будем считать, что ρ_Λ — это плотность темного поля. Дело в том, что в рассматриваемой системе, помимо наблюдаемой материи, имеются фотоны темного поля. Они приборами не регистрируются, но могут воздействовать на наблюдаемую материю согласно закону Архимеда.

Будем интересоваться, при каких значениях параметров, характеризующих изучаемую систему, она может находиться в равновесии. Это значит, нам нужно найти такие значения этих параметров, при которых уравнения (52) и (53) допускают решение $\ddot{a} = 0$ и $\dot{a} = 0$. Так как нам требуется только динамическое равновесие, то достаточно, чтобы такое решение существовало для значений параметров, усредненных по малой области в пространстве \mathfrak{M} .

Сначала рассмотрим область ядра и мантии протона. В этой области $3P = \rho c^2$. Поэтому в области равновесия должно выполняться

$$\rho = \rho_\Lambda = \frac{3c^2}{16\pi G a^2}. \quad (54)$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$M_a = \frac{4\pi}{3} a^3 (\rho + \rho_\Lambda) = M \frac{a}{R_G}, \quad (55)$$

где M — масса протона; M_a — масса центральной области протона радиуса a ; $R_G = 2G M/c^2$ — так называемый гравитационный радиус протона, $R_G = 2,5 \cdot 10^{-52}$ см. Наиболее естественная физическая интерпретация соотношения (55) следующая. Область радиуса a — ядро протона, эта область динамически равновесна, излишнюю массу, поступающую в нее благодаря гравитации, она сбрасывает в виде конденсационного излучения. Для параметров справедливо $M_a \sim M$ ($M_a < M$), $a \sim R_G$.

Теперь рассмотрим область коры протона. В этой области, помимо фотонов, имеются заряженные частицы кварк-глюонной материи. Опять будем использовать уравнения (52) и (53). Но так как имеющиеся экспериментальные данные, относящиеся к этой области, касаются распределения электрического заряда в этой области, то в качестве плотности наблюдаемых ρ в этой области будем рассматривать плотность кварк-глюонной материи. Темные фотоны, а также фотоны конденсационного излучения учтем в Λ -члене. Так как в этой области электромагнитное взаимодействие гораздо сильнее гравитационного, то внешнее воздействие на наблюдаемую кварк-глюонную материю будет определяться не выталкивающей силой Архимеда, а электромагнитным взаимодействием с конденсационным излучением.

Пусть в (53) давление связано с плотностью соотношением $P = b\rho c^2$. Так как мы будем оценивать величины только по порядку, точное значение коэффициента b несущественно, достаточно, чтобы он был мень-

ше 10. Для простоты положим $b = 0$. Тогда из уравнения (53) следует, что \ddot{a} будет обращаться в ноль при $\rho = 2\rho_\Lambda$. Подставляя это значение в уравнение (52) и полагая \dot{a} равным нулю, получаем условие динамического равновесия в этой области.

Эксперимент показывает, что электрический заряд протона сосредоточен в узком сферическом слое радиусом $1 \cdot 10^{-13}$ см. Подставляя этот радиус в качестве значения a в формулу (54), получаем для плотности кварк-глюонной материи в протоне

$$\rho = \frac{c^2}{8\pi G a^2} = 6 \cdot 10^{52} \text{ г/см}^3. \quad (56)$$

Эту плотность можно сравнить с плотностью электрона. Если предположить, что электрон имеет такую же плотность, то его радиус должен по порядку равняться 10^{-27} см. Это не противоречит современным экспериментальным данным. Верхняя граница для радиуса электрона: 10^{-20} см.

Стабильность протона в вакууме является экспериментально установленным фактом. В предложенной модели эта стабильность трактуется как динамическое равновесие физической системы, моделирующей протон. Ключевую роль в предложенной модели играют мягкие и супермягкие нерегистрируемые фотоны и их гравитационное и электромагнитное взаимодействие. В этой модели протон обладает свойствами черной дыры, в которой идут два противоположно направленных процесса. Первый процесс — это концентрация супермягких фотонов в центральном ядре, она обеспечивается гравитацией. В свою очередь, эта концентрация увеличивает вероятность процесса, в котором часть мягких фотонов замещается более энергичными частицами (конденсационным излучением).

Конкуренция этих двух процессов идет по всей толще протона, включая и границу протона, где мягкие фотоны протона контактируют с мягкими фотонами окружающего вакуума. Вакуум в рассматриваемой модели — это не пустое пространство, а пространство, заполненное мягкими и супермягкими нерегистрируемыми фотонами. Эти фотоны не виртуальные, а вполне реальные, только их энергия ниже порога чувствительности используемых измерительных приборов. При достаточно большой исходной плотности супермягких фотонов в центре ядра такая конструкция обязательно должна иметь точку динамического равновесия. Значением этой точки равновесия определяется масса протона. К сожалению, независимо найти точку равновесия мы не можем, так как это значение определяется деталями сильного взаимодействия кварков. Но сам факт существования точки равновесия от этих деталей не зависит.

Бросается в глаза, что предложенная конструкция протона очень похожа на конструкцию системы, помещенной в термостат. В данном случае роль термостата играет «фотонный вакуум», состоящий из фотонов темной материи и темной энергии. Заметим, что горячим сто-

ронником использования в квантовых процессах аналогии с поведением физической системы в термостате был Блохинцев [55–58].

С минимальными изменениями все рассуждения данного раздела можно использовать для построения модели электрона. Нужно только предположить, что существуют какие-то субэлектронные носители электрического заряда. В этом случае, так же как для протона, у электрона естественным путем возникнут гравитационный и зарядовый радиусы.

13. МОДЕЛЬ АТОМА ВОДОРОДА

Имея модель протона, сравнительно легко построить модель атома, во всяком случае — водорода. Надо просто добавить электрон, который электромагнитным образом взаимодействует с протоном.

Однако здесь сразу же возникает проблема локальности. С одной стороны, эксперименты по сверхточному измерению магнитного момента электрона [59] указывают на то, что электрон практически является точечной частицей. С другой стороны, эксперименты с атомами говорят, что волновая функция электрона размазана по сферическому слою, радиус которого близок к радиусу атома. Подобного типа противоречия встречаются очень часто при использовании стандартного математического аппарата квантовой теории. Для их обхода даже придуман специальный механизм — коллапс волновой функции. Но сколько-нибудь внятного физического объяснения этому механизму обычно не приводится. Как уже упоминалось, для обсуждения локальных свойств алгебраический подход приспособлен значительно лучше.

Если около протона находится электрон, то вопреки предположению Бора, но в согласии с Ньютоном он будет с ускорением падать на протон. Опять-таки вопреки Бору, но в согласии с Максвеллом он будет испускать фотоны. Эти фотоны нарушат динамическое равновесие, которое раньше было между атмосферой протона и окружающей средой. Для восстановления равновесия часть фотонов из атмосферы должна уйти в более глубокие слои протона, нарушая динамическое равновесие в них. Так возмущение в конце концов дойдет до ядра протона.

Теперь проследим за судьбой электрона. Он упадет на кварк-глюонную оболочку протона. С некоторой вероятностью он от нее отразится, а с некоторой вероятностью пробьет ее и устремится к ядру протона, нарушая динамическое равновесие в глубоких слоях протона. В конце концов он может дойти до бозе-конденсата протона. Благодаря гравитации и всем тормозным фотонам, которые на своем пути породит электрон, конденсат будет перегружен мягкими фотонами. Поэтому в нем процесс типа изображенного на рис. 3 станет более вероятен. Электромагнитное взаимодействие между фотонами конденсата с электроном гораздо сильнее, чем между самими фотонами. Поэтому процесс концентрации энергии в первую очередь затронет именно электрон. В результате электрон вместе с конденсационным излучением вылетит из ядра протона,

восстанавливая его динамическое равновесие. Далее, подобно камню, брошенному с поверхности земли, электрон полетит по некоторой параболической траектории. Конечно, по дороге он опять будет излучать тормозные фотоны.

Однако, как объяснялось в предыдущем разделе, эти добавочные фотоны в конце концов попадут в бозе-конденсат, генерируя в нем конденсационное излучение. Таким образом, несмотря на излучение тормозных фотонов, кинетическая энергия в системе не будет стремиться к нулю, а будет колебаться в некотором конечном интервале. При повторном падении электрона на конденсат он опять полетит по какой-то другой параболической траектории и так бесконечное число раз.

Здесь, как и в термодинамике, следует отличать «медленное время» от «быстрого» (см. [50]). В термодинамике быстрое время следит за движением частицы, описываемым динамикой Ньютона. Медленное время следит за изменением средних значений наблюдаемых, подобно тому как в термодинамике бесконечно малый промежуток медленного времени δt может рассматриваться как бесконечно большой для быстрого времени. Поэтому можно считать, что за этот промежуток электрон успеет совершить бесконечно много нырков.

При своем движении через фотонную атмосферу атома электрон будет вызывать в ней возмущения. Так в этой атмосфере могут возникнуть волны. Волны могут быть двух типов: радиальные и кольцевые. Атом — стабильная система. Для его стабильности необходимо, чтобы движения электрона были согласованы с колебаниями в волнах.

Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, подобной той, которая возникает в упомянутом ранее макроскопическом эксперименте с блуждающей каплей. В нашей модели цепная реакция в конденсате соответствует вибрациям в этом эксперименте, электрон соответствует капельке масла, мягкие фотоны — силиконовому маслу. Имеется и некоторое отличие. В макроскопическом эксперименте фигурирует одно вертикальное направление и одна поверхностная волна в горизонтальной плоскости. В предлагаемой модели атома вертикальных (радиальных) направлений бесконечно много. Соответственно, горизонтальных плоскостей также бесконечно много, и в каждой из них может образоваться «поверхностная» (кольцевая) волна.

При изучении термодинамики газа следить за «ньютоновским» движением частиц газа практически невозможно. Поэтому вместо ньютоновских частиц следят за «статистическими» частицами, у которых внутренние параметры такие же, как у ньютоновских, но траектории другие. Значения кинематических параметров у статистических частиц равняются средним за время измерения значениям соответствующих параметров у ньютоновских частиц. Динамика статистических частиц определяется не ньютоновскими силами, а термодинамическими потенциалами.

Подобно ситуации в термодинамике, следить за ньютоновским движением электрона невозможно. Поэтому вместо «ньютоновского» электрона

можно следить за движением «статистического» электрона. У последнего внутренние характеристики такие же, как у «ньютоновского». Этим он отличается от виртуального, но траектория движения у него отлична от траектории «ньютоновского» электрона. При этом в точках траектории статистического электрона значения его кинематических наблюдаемых совпадают с значениями соответствующих «ньютоновских» величин, усредненных по промежутку времени δt (времени, необходимого для регистрации данного значения). Так же как в термодинамике, динамика статистического электрона определяется не ньютоновскими силами, а потенциалами.

Благодаря процессу концентрации энергии (рис. 3) все радиационные потери при ускоренном движении ньютоновского электрона возвращаются к статистическому электрону обратно. Поэтому можно считать, что статистический электрон движется без этих потерь.

В устойчивой волне колебания должны быть согласованы с импульсом статистического электрона. Иными словами, устойчивая волна мягких фотонов должна быть когерентна статистическому электрону. Таким образом, для устойчивости атома необходимо, чтобы эти волны имели структуру маркированных волн согласно понятию, введенному в разд. 11. Маркером в этой волне является статистический электрон с волновым вектором \mathbf{k} , а функция \mathbf{u}_k , определяющая модуль кольцевой волны, должна удовлетворять условию периодичности. Соответственно, длина орбиты должна равняться целому числу длин волн.

При внешнем воздействии на атом статистический электрон может перейти с устойчивой кольцевой орбиты на квазиустойчивую, поглотив определенную порцию энергии. В квазиустойчивом состоянии нырки ньютоновского электрона будут продолжаться, вызывая колебания в фотонной атмосфере. В результате сформируется радиальная маркированная волна, которая будет излучена возбужденным атомом. Это дает основание сделать предположение, что электрон, подобно кваркам, в свободном состоянии никогда не находится. Он находится либо в составе атома, молекулы, кристалла и т.п., либо в виде маркера в маркированной волне. Поэтому мы постоянно обнаруживаем у электрона волновые свойства.

Маркированная волна — очень интересный физический объект. С помощью макроскопических приборов такая волна может быть разделена на две когерентные части: с маркером и без маркера. Часть без маркера несет ничтожную энергию, но может содержать существенную информацию. В принципе, это может открыть новые возможности для передачи информации.

Как отмечено в разд. 11, с одной стороны, маркированные волны могут рассматриваться как классические электромагнитные волны, имеющие определенную локализацию в трехмерном пространстве. С другой стороны, эти волны могут рассматриваться как векторы $|\beta_k\rangle$ в некотором

гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_k^{\text{ph}}$. Оказывается полезным еще пространство \mathfrak{H}^{ph} — прямая ортогональная сумма пространств $\mathfrak{H}_k^{\text{ph}}$ с разными k .

С точки зрения алгебраического подхода маркированная волна может рассматриваться как квантовый ансамбль, состоящий из огромного числа отдельных супермягких фотонов. Поэтому нет ничего удивительного, что эта волна может быть описана вектором в гильбертовом пространстве. Однако с физической точки зрения кажется не очень хорошо считать, что отдельный супермягкий фотон находится в некотором элементарном состоянии. Дело в том, что это элементарное состояние в разд. 3 определено через понятие «наблюдаемая», а отличительным признаком супермягкого фотона является невозможность его наблюдения.

Эта нестыковка в математическом и физическом толковании может быть устранена следующим образом. Вспомним, что в действительности мы следим не за волнами супермягких фотонов, а за статистическим электроном (или наблюдаемым фотоном) — маркером такой волны. Пусть этот электрон (фотон) имеет волновой вектор \mathbf{k} . За время, необходимое для регистрации характеристик такого электрона (фотона), «ньютоновский» электрон (фотон) пройдет через область регистрации огромное число раз. Поэтому мы будем иметь дело не с отдельной маркированной волной, а с ансамблем таких волн, маркеры которых имеют волновой вектор \mathbf{k} . Маркеры, фиксирующие фазу в этих волнах, будут располагаться случайным образом. Выделим из этого ансамбля подансамбль, элементами которого будут маркеры. Сделаем стандартное в теории вероятности предположение, что для каждого положения маркера в волне вероятность одна и та же. В этом случае пространственные расположения маркеров будут повторять пространственные расположения супермягких фотонов в одной маркированной волне. Поэтому ансамблю этих маркеров можно сопоставить вектор $|\beta_k\rangle_m$ в гильбертовом пространстве \mathfrak{H}_k^m , которое изоморфно пространству $\mathfrak{H}_k^{\text{ph}}$. Соответственно, вектор $|\beta_k\rangle_m$ будет образом вектора $|\beta_k\rangle$. В отличие от последнего, вектор $|\beta_k\rangle_m$ нельзя представить в виде классической волны, в которой частицы взаимодействуют между собой. Этот вектор можно интерпретировать только как волну вероятностей. Зато отдельные частицы этой волны будут физически наблюдаемы.

В выбранном ансамбле маркеров можно трактовать переход от одного элемента ансамбля к другому либо как движение маркера по орбите в плоскости, ортогональной \mathbf{k} , либо как движение маркера по радиальному направлению. Для такого движения будут справедливы аксиомы Бора. Иными словами, мы приходим к модифицированной модели Резерфорда–Бора. Соответственно, для атома водорода будут справедливы результаты, полученные Бором.

Вместе с тем в предлагаемой модели для статистического электрона являются допустимыми кольцевые орбиты, соответствующие любому другому направлению вектора \mathbf{k} . В силу сферической симметрии все они будут равновероятны. Поэтому адекватное описание состояний электрона

в атоме следует делать не в терминах орбит, а в терминах орбиталей, как это делается в стандартной современной модели атома, т. е. в терминах векторов в пространстве \mathfrak{H}^m , изоморфном пространству \mathfrak{H}^{ph} .

В предлагаемой модели атома центральная роль отводится мягким и супермягким фотонам, особая роль — их бозе-конденсату. Этот конденсат утилизирует все отходы движения и перерабатывает их в новое движение. Получается что-то похожее на вечный двигатель.

Существование такого двигателя не противоречит закону сохранения энергии, а наоборот, он обеспечивает исполнение этого закона и позволяет отказаться от предположения, что существует точка сингулярности, в которой с энергией происходит непонятно что.

Предложенная схема может оказаться весьма полезной и при построении модели эволюции черных дыр, так как и в этом случае можно избежать появления точек сингулярности и полной аннигиляции черной дыры.

В данном разделе предлагается достаточно физически наглядная модель строения атома. Основные положения предложенной схемы можно использовать для построения модели эволюции Вселенной. Возможный вариант такой модели рассмотрен в статье [60].

14. МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ С ФОТОННЫМ БОЗЕ-КОНДЕНСАТОМ

В последние годы интенсивно развивается космология. Благодаря развитию новых технологий больших успехов достигла наблюдательная астрономия. В частности, были установлены следующие интересные факты: видимая часть Вселенной расширяется, причем расширение идет с ускорением, крупномасштабно Вселенная изотропна, однородна и ее кривизна близка к нулю. Во Вселенной практически нет антивещества.

Анализ экспериментальных данных позволяет достаточно подробно восстановить историю развития Вселенной после Большого взрыва, который произошел примерно 13,5 млрд лет тому назад. О периоде до Большого взрыва никаких экспериментальных данных нет. Это, вроде бы, открывает широкий простор для спекуляций при построении моделей развития Вселенной в этот период.

Поэтому прежде чем строить модель Вселенной, желательно договориться о правилах, которых надо придерживаться при таком построении. Прежде всего, модель не должна противоречить ни одному достаточно твердо экспериментально установленному факту. Только после этого надо следить, чтобы в модели воспроизводилось возможно большее количество экспериментально установленных фактов. Конечно, от модели нельзя требовать, чтобы она воспроизводила все факты. Но она не должна запрещать воспроизведение подобных фактов.

Попытаемся для построения модели Вселенной воспользоваться опытом, приобретенным при построении модели протона. Начнем с постро-

ения цепочки физических объектов, которые можно рассматривать как промежуточные между протоном и Вселенной.

Допустимым вариантом такой цепочки является следующий: ядра химических элементов, трансурановые элементы, планеты (в частности, Земля), звезды (в частности, Солнце), галактики, метagalактики.

Из этой цепочки первым обсудим тритон (ядро трития). По своей внутренней структуре он очень похож на протон. Поэтому для построения его модели можно воспользоваться рассуждениями, которые были использованы для протона. Единственная разница между протоном и тритоном — это другой набор кварков в коре, но конкретный вид такого набора для протона не обсуждался.

Однако по своему поведению тритон существенным образом отличается от протона. В то время как протон является стабильной частицей, тритон испытывает бета-распад. Иными словами, в нем происходит микровзрыв.

Двигаясь далее по звеньям выбранной цепочки, будем сталкиваться как со стабильными, так и с нестабильными элементами. Стабильность и нестабильность зависит от того, каково адронное содержание в рассматриваемом элементе. Теорию этой проблемы детально обсуждать особого смысла не имеет. Здесь существенную роль играет сильное взаимодействие кварков. К сожалению, в настоящее время теории такого процесса фактически нет.

Пока в своем рассмотрении мы находимся на микроуровне, будем сталкиваться с микровзрывами. Однако люди уже научились так искусственно подбирать адронное содержание, что происходят не микровзрывы, а взрывы очень большой мощности. Имеется в виду атомное и термоядерное оружие. Переходя далее на уровень планет и звезд, мы столкнемся с взрывами астрономического масштаба.

Все это указывает на то, что Большой взрыв следует рассматривать не как уникальное, а как рядовое явление. Особо обратим внимание на то, что среди всех взрывов в элементах цепочки нет ни одного, при котором из ничего (даже отдаленно напоминающего «ничего») возникало нечто. Более того, последнее явление в природе, вообще, никогда не наблюдалось. Это позволяет считать экспериментально твердо установленным, что такого быть не может. Конечно, можно верить в чудо, но это уже выходит за рамки экспериментально установленных фактов.

Хотя прямых экспериментальных данных о свойствах Вселенной до Большого взрыва нет, анализ звеньев предложенной цепочки позволяет с большой уверенностью описать эти свойства.

Непосредственно до Большого взрыва Вселенная была глобально, практически, такой же, как непосредственно после взрыва. Именно до взрыва Вселенная была глобально изотропна, однородна, в ней почти не было античастиц. Перечисленные свойства в результате взрыва могли немного измениться, но на общем фоне эти изменения должны быть

очень малыми. Наблюдения показывают, что такой сценарий взрывов реализуется во всех звеньях цепочки.

Предприняты многочисленные попытки теоретической интерпретации наблюдаемых фактов. Из них наиболее популярной является так называемый стандартный сценарий Большого взрыва (см., например, [61]). Однако в этом сценарии имеются досадные пробелы. Что было до Большого взрыва (или ничего не было)? Что явилось причиной Большого взрыва (или никакой причины не было)? Начальный этап расширения Вселенной от сингулярной точки до миллиметровых размеров (стадия инфляции) какой-то неправдоподобно скоротечный. При этом предлагаемый механизм инфляции выглядит достаточно искусственным, а Вселенную в виде точки сингулярности сколько-нибудь наглядно, вообще, представить невозможно. В качестве источника ускорения расширения Вселенной предлагается темная энергия, но что это такое, мягко выражаясь, не вполне ясно. Не очень понятно, почему во Вселенной практически нет антивещества.

Чтобы избежать этих осложнений, можно попытаться для построения модели Вселенной воспользоваться опытом, приобретенным при построении модели протона.

Обычно говорится, что самым распространенным элементом в космическом пространстве является водород. Однако, с точки зрения физики элементарных частиц, протоны принципиально мало чем отличаются от фотонов, а последних значительно больше. Так, по оценочным данным (см. опять [61]) в 1 см^3 космического пространства содержится порядка $2 \cdot 10^{-7}$ барионов и 500 фотонов. При этом имеются в виду фотоны, которые могут быть зарегистрированы. С учетом тормозных — фотонов гораздо больше.

В пространстве фотоны распределены более или менее равномерно, но, конечно, возможны флуктуации, в том числе и очень большие. Со времени Большого взрыва прошло слишком мало времени и вероятность большой флуктуации мала. Однако если всемирная история началась не с Большого взрыва, а имела бесконечно долгую предысторию, то вполне вероятно очень большая флуктуация.

Благодаря флуктуации плотности в некоторой области могли возникнуть условия для начала формирования черной дыры. В этом случае по примеру образования звезд из пылевого облака могла образоваться суперзвезда, состоящая из фотонов и барионной материи (кварков и лептонов), но последних будет гораздо меньше. Можно ожидать, что барионов и антибарионов будет примерно одинаковое количество, но, конечно, абсолютное равенство практически невозможно.

По примеру наблюдаемых звезд образовавшаяся суперзвезда может быть стабильной, а может быть нестабильной. О нестабильности мы поговорим несколько позже, а пока будем считать, что период стабильности был достаточно большим. Благодаря многочисленным хаотическим перераспределениям за время равновесия суперзвезда должна приобрести

сферическую симметрию (в собственной системе координат) и станет вращаться вокруг своей оси.

Если суперзвезда имеет размеры, исчисляемые гигапарсеками, или большие, то область, имеющая сантиметровые размеры и расположенная на гигапарсековом расстоянии от центра, будет практически однородна. Если в ней преобладает барионное вещество, то благодаря перерасеяниям барионное антивещество успеет все проаннигилировать.

Для моделирования внутренней структуры суперзвезды сделаем те же предположения, что и раньше для моделирования внутренней структуры протона, с поправкой на астрономические размеры суперзвезды. Иными словами, предположим, что у суперзвезды есть ядро, магма, кора и атмосфера.

Опять предположим, что ядром является бозе-конденсат супермягких фотонов, который имеет структуру черной дыры. Только теперь это не микроскопическая черная дыра, а наоборот, гигантская черная дыра.

У суперзвезды есть выделенное направление к центру звезды. Однако если мы выделим относительно небольшой, порядка 1 см^2 , участок (прообраз нашей Вселенной) в суперзвезде и свяжем систему координат с этим участком, то в этом участке выделенного направления не будет. Кроме того, в этом участке не будет ощущаться колоссальная сила притяжения к центру звезды, так как эта сила будет уравновешена центробежной силой, возникшей от вращения звезды (эффект невесомости).

Так же как в случае с протоном, будем считать, что коллапсу суперзвезды в сингулярную точку будет препятствовать цепная реакция, приводящая к рождению конденсационного излучения. Никакая антигравитация здесь не нужна. Однако в зависимости от барионной ситуации, которая сложилась в области, где началась цепная реакция, возможны два варианта дальнейшего развития событий. Первый вариант — это когда цепная реакция постепенно затухает. Этот вариант обеспечивает стабильность структуры суперзвезды. Второй вариант — это когда цепная реакция идет вразнос. В этом случае может произойти мощный взрыв, который будет сопровождаться мощной взрывной волной.

Такой взрыв вполне подходит на роль Большого взрыва, с которого, как полагают, началась история нашей Вселенной. При этом может иметься два существенных отличия от так называемого стандартного сценария. Во-первых, взрывная волна не обязана распространяться со сверхзвуковой скоростью. Во-вторых, эта волна приходит на заранее подготовленный участок суперзвезды. Как указано выше, этот участок уже до прихода взрывной волны был однороден и в нем практически не было антивещества. Иными словами, он обладал свойствами, которые в стандартном сценарии должны были возникнуть в момент взрыва.

Естественно предположить, что сценарий последующих событий был обычным для случая прихода мощной взрывной волны. То есть в участке прихода волны должна значительно повыситься температура, участок должен получить большой импульс и должен быть разорван на множе-

ство осколков, которые в среднем однородно будут разлетаться в разные стороны. Какой-то из осколков в дальнейшем мог бы оказаться нашей прародиной.

Для описания послевзрывной нашей Вселенной может использоваться стандартный сценарий. При этом можно избежать использования очень спорной «довзрывной» части стандартного сценария. Предположение о существовании загадочного инфлатона также не является необходимым. Вместо этого можно сделать следующие предположения.

Во-первых, то, что период перед взрывом был не очень коротким, а очень длительным.

Во-вторых, никакой сингулярности не было.

В-третьих, Вселенная была очень маленькой частью коры очень большой суперзвезды.

В-четвертых, фундаментальные законы физики были такими же, как сейчас.

После развала на осколки в нулевом приближении общая структура Вселенной останется прежней. Однако в первом приближении структура может измениться. Следует ожидать некоторого нарушения изотропности. Вселенная распадется на множество минивселенных, структуру которых можно будет увидеть с Земли.

Для тех осколков (минивселенных), которые не ушли за горизонт видимости, появляется возможность наблюдения их внутренней структуры. Следует ожидать таких результатов. Если в кварк-глюонной коре осколка имеется достаточно мощный источник излучения, то его можно будет зарегистрировать с Земли. С другой стороны, если для осколка частота конденсационного излучения достаточно низкая, то область мантии осколка и его ядра будет выглядеть как темное пятно. Современные астрономические наблюдения рисуют именно такую ячеистую картину.

Вместе с тем представляет интерес и ситуация, в которой частота конденсационного излучения достаточно велика. В этом случае это излучение можно будет наблюдать с Земли. Вполне подходящими претендентами на роль таких объектов могут быть квазары.

Теперь, повторяя технику разд. 12, попытаемся сделать некоторые численные оценки, используя уравнения Фридмана с Λ -членом (уравнения (52), (53)):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{4\pi G}{3} (\rho + \rho_\Lambda) - \frac{kc^2}{2a^2}, \quad (57)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} - 2\rho_\Lambda \right). \quad (58)$$

Вселенная, в которой мы живем, располагается в барионном слое суперзвезды. Фигурирующая в уравнениях (57), (58) величина a — это средний радиус этого слоя. Напомним, что G — гравитационная константа, ρ и P — плотность и давление наблюдаемой материи, c —

скорость света, k — параметр кривизны (в нашем случае $k = 1$), ρ_Λ — Λ -член.

Сначала рассмотрим нулевое приближение. В этом приближении Вселенная стабильна. Поэтому следует считать, что $\dot{a} = \ddot{a} = 0$. Будем также считать, что $P = 0$. Тогда, решая уравнения, находим

$$\rho_{\hat{L}} = 0,5\rho, \quad a^2 = c^2/4\pi G\rho.$$

Считая, что $\rho \sim 10^{-30}$ г/см³, для среднего радиуса получаем $a \sim 10^{28}$ см.

Первое приближение учитывает, что \dot{a} и \ddot{a} отличны от 0. В этом случае уравнения (57), (58) удобно переписать в виде

$$\frac{c^2}{a^2} = 4\pi G\rho + \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \quad (59)$$

$$2\rho_{\hat{L}} = \rho + \frac{\ddot{a}}{a} \frac{3}{4\pi G}. \quad (60)$$

Если мы отбросим физически бессмысленное решение $a < 0$, то при заданных ρ , \dot{a} и \ddot{a} уравнения (59) и (60) будут однозначно определять a и $\rho_{\hat{L}}$. Существующие экспериментальные данные не фиксируют ρ , \dot{a} и \ddot{a} абсолютно однозначно. Но они, по крайней мере, не противоречат утверждению, что физически разумные решения у уравнений (59) и (60) имеются.

Конечно, Вселенная не является просто увеличенной копией протона. В частности, о протоне известно, что он практически стабилен. Наоборот, о Вселенной известно, что она стабильна только в нулевом приближении, а в следующих приближениях нестабильна.

Для протона известна масса, гравитационный радиус, зарядовый радиус. Для Вселенной все эти величины являются свободными параметрами. Наглядно можно представить нашу Вселенную в виде протуберанца, который развивается в суперзвезде. Таким образом, мы живем в развивающемся протуберанце.

15. МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ИЗМЕРЕНИЯ

В квантовом случае элементарное состояние $\varphi = [\varphi_\xi]$ индивидуальной физической системы — это совокупность функционалов $\varphi_\xi(\cdot)$, каждый из которых является характером максимальной действительной коммутативной подалгебры Ω_ξ алгебры \mathfrak{A} . Множество Ξ ($\xi \in \Xi$) таких подалгебр имеет мощность континуума. Таким образом, элементарное состояние — это функциональнозначное поле над множеством Ξ .

Для задания φ необходимо и достаточно задать φ_ξ для каждого $\xi \in \Xi$. В свою очередь, для задания φ_ξ достаточно задать значение φ_ξ на каждой образующей подалгебры Ω_ξ . Можно считать, что каждой образующей подалгебры Ω_ξ соответствует компонента этого функциональнозначного поля φ . Значение функционала φ_ξ на образующей может

рассматриваться как значение компоненты поля φ в точке ξ . Таким образом, φ — это действительное c -числовое многокомпонентное поле над множеством Ξ .

Соответственно, даже квантовая система, которую принято рассматривать как систему с конечным числом степеней свободы (например, гармонический осциллятор), в квантовом случае является полевой системой, т. е. системой с бесконечным числом степеней свободы. Отсюда следует, что в элементарном состоянии любой квантовой системы, в принципе, может быть зашифрован бесконечный объем информации. Однако для реального использования этот бесконечный объем недоступен. Дело в том, что для того чтобы информация была для нас полезной, мы должны иметь возможность ее контролировать с помощью классических приборов. Однако классические приборы не могут отличить одно элементарное состояние от другого, они различают только классы эквивалентности, которые соответствуют квантовым состояниям. Поэтому объем контролируемой информации оказывается конечным, но он все равно может быть гораздо большим, чем для классических физических систем. Это физическая предпосылка возможности построения квантовых компьютеров.

Элементарное состояние всякой физической системы является полем и над пространством \mathcal{M} . Дело в том, что системы, которые в квантовой механике традиционно рассматриваются как точечные, в действительности являются распределенными в пространстве \mathcal{M} .

Таким образом, элементарное состояние φ любой квантовой системы описывается действительным c -числовым полем над множеством Ξ и пространством \mathcal{M} . Это поле имеет все признаки реального классического поля. Если мы принимаем классическую парадигму, то допустимо считать, что существует некоторое материальное поле, математическим образом которого является φ .

Однако, как объяснялось в разд. 3, зависимость этого материального поля от ξ никакой совокупностью измерительных приборов не может быть найдена. Поэтому назовем это поле скрытым. Примером скрытого поля является поле темных фотонов.

Предположение о материальном существовании скрытого поля может помочь решить одну из проблем квантовой теории — проблему корпускулярно-волнового дуализма. Здесь для этого понятия будет использоваться термин «корпускулярно-полевой дуализм». Полевые свойства квантовой системы естественным образом связываются со скрытым полем, т. е. с элементарным состоянием системы, в то время как корпускулярные свойства — с наблюдаемыми системы, точнее, с локальными наблюдаемыми.

Корпускулярные свойства квантовой системы означают следующее. У физической системы имеются локальные наблюдаемые, т. е. наблюдаемые, ассоциированные с ограниченной областью в пространстве \mathcal{M} . Эти наблюдаемые, точнее, их комплексные комбинации, образуют алгеб-

ру локальных наблюдаемых. Существуют устойчивые наборы значений локальных наблюдаемых, которые мы трактуем как квантовые частицы определенного типа: электроны, протоны, ядра, атомы и т. п.

Измерительные приборы воспринимают эти наблюдаемые как неделимое целое. В этом проявляются корпускулярные свойства квантовых систем. Реакция измерительного прибора определяется элементарным состоянием системы (скрытым полем). В свою очередь, структура (значение) скрытого поля определяется спектрами соответствующих наблюдаемых. Отметим, что точка спектра — это неделимая сущность. Таким образом, в квантовой системе корпускулярные и полевые свойства оказываются тесным образом переплетенными.

В стандартном подходе к квантовой механике квантовое состояние физической системы также ассоциируется с s -числовым полем — волновой функцией. Однако волновая функция комплексна. Поэтому она не может непосредственно соответствовать материальному полю. В предлагаемой трактовке волновая функция связана только с вероятностью, причем довольно опосредованно. А именно, средние значения наблюдаемых *могут быть представлены* (а не являются) в виде математических ожиданий линейных операторов некоторого гильбертова пространства. В свою очередь, векторы этого гильбертова пространства *могут быть представлены* в виде волновых функций.

Скрытое поле может рассматриваться в качестве материального носителя информации о физическом состоянии квантового объекта. Чтобы являться таким носителем, оно должно быть согласованным (когерентным) с ассоциированным квантовым объектом. Это позволяет на основе скрытого поля построить вполне правдоподобную модель процесса измерения. Напомним, что на отсутствие такой модели обычно списывают многие нестыковки, которые существуют в стандартном подходе.

Опишем подобную модель. Измерительный прибор состоит из анализатора и детектора. Иногда эти составляющие измерительного прибора могут быть совмещены. Анализатор — это устройство с одним входным каналом и несколькими выходными. Если прибор предназначен для измерения наблюдаемой \hat{B} , то каждый выходной канал соответствует определенному участку спектра этой наблюдаемой, т. е. каждый выходной канал соответствует некоторому классу эквивалентности элементарных состояний.

Скрытое поле, ассоциированное с измеряемым квантовым объектом, возбуждает в анализаторе коллективные колебания, когерентные полю. Колебания могут быть очень слабыми, но в силу когерентности они взаимодействуют с квантовым объектом резонансным образом. Микроскопическое описание такого взаимодействия практически не осуществимо. Однако результат этого взаимодействия можно описать в виде некоторого граничного условия. Если квантовое состояние измеряемого объекта описывает класс эквивалентности, который соответствует одному из выходных каналов, то объект однозначно попадает в этот выходной

канал. Если изучаемый объект находится в квантовом состоянии, которое не соответствует ни одному из выходных каналов, то анализатор оказывается областью бифуркации для этого объекта. В этом случае резонансное взаимодействие объекта с возбужденным скрытым полем колебаниями анализатора оказывается той случайной силой, которая направляет объект в определенный выходной канал. Именно в канал, соответствующий классу эквивалентности, к которому принадлежит элементарное состояние измеряемого объекта.

Здесь под областью локализации квантового объекта подразумевается область локализации его локальных наблюдаемых, которые могут быть зарегистрированы классическими измерительными приборами. В дальнейшем эту область локализации будем называть керном квантового объекта. Примером керна является область локализации маркированных волн, ассоциированных с изучаемым физическим объектом.

Вместе с тем, как уже упоминалось, квантовый объект сопровождается полем, которое, с одной стороны, не регистрируется измерительными приборами, а с другой стороны, является составной частью скрытого поля. Поэтому анализатор может стать областью ветвления скрытого поля. В каждый выходной канал анализатора попадет соответствующая часть скрытого поля.

Анализатор — это классический объект. Взаимодействие скрытого поля с классическим объектом может быть двух типов. При первом типе когерентность скрытого поля с излучающим объектом не нарушается, при втором типе — нарушается. Поскольку мы предполагаем, что скрытое поле возбуждает в анализаторе колебания, когерентные полю, и они резонансно взаимодействуют с квантовым объектом, то следует считать, что взаимодействие с анализатором не нарушает когерентности поля. Будем также считать, что воздействие квантового объекта на анализатор макроскопически не регистрируемо. Подобная регистрация происходит в детекторе.

Детектор — это классическая система, находящаяся в состоянии неустойчивого равновесия. Детектор сильно взаимодействует с керном квантового объекта. В результате этого взаимодействия детектор выходит из состояния равновесия. В нем развивается катастрофический, макроскопически регистрируемый процесс. Детектор (детекторы) располагается на одном (нескольких) выходном канале анализатора. В результате срабатывания детектора происходит фиксация выходного канала анализатора, в который попал керн квантового объекта. Так происходит фиксация значения наблюдаемой \hat{V} у квантового объекта. Одновременно фиксируется класс эквивалентности, к которому принадлежит элементарное состояние измеряемого объекта.

Обратное воздействие детектора на квантовый объект также сильное. В случае невозпроизводимого измерения происходит полное изменение элементарного состояния квантового объекта. При воспроизводимом измерении когерентность также нарушается, но элементарное состояние

квантового объекта остается в классе эквивалентности, соответствующем выходному каналу, через который прошел kern квантового объекта. Kern квантового объекта и сопровождающее его скрытое поле перестают быть когерентными частям скрытого поля, прошедшими через другие выходные каналы анализатора.

Если детектор стоит на выходном канале, через который kern квантового объекта не прошел, то детектор испытывает только слабое воздействие со стороны скрытого поля, прошедшего через этот канал. Катастрофический процесс в детекторе не развивается, и макроскопический эффект не регистрируется. Однако обратное воздействие детектора на скрытое поле оказывается существенным. Поле в этом канале теряет когерентность с kernом квантового объекта и частями скрытого поля, прошедшими через другие каналы.

Если ни в одном из каналов анализатора детекторы не поставлены, то можно, в принципе, соединить вновь все части скрытого поля, прошедшие через разные каналы. Они когерентно сложатся, и может воссоздаться прежнее элементарное состояние. Если в каком-то канале детектор имеется, то соответствующая часть скрытого поля не может принять участие в когерентном сложении. Эффективно, с точки зрения элементарного состояния квантового объекта, эта часть скрытого поля теряется. Модель измерения, похожая на эту, описана в обзоре [62].

Таким образом, часть скрытого поля, определяющего элементарное состояние квантового объекта, эффективно может «исчезнуть» в двух случаях. Либо происходит изменение состояния (с нарушением когерентности) этой части поля, либо с этой частью поля ничего не происходит, а меняется состояние kernа квантового объекта. В обоих случаях меняется структура скрытого поля, когерентного kernу. Именно такое поле определяет элементарное состояние квантового объекта. При изменении элементарного состояния естественно происходит изменение квантового состояния. Такое изменение имеет все признаки коллапса квантового состояния при измерении.

Скрытое поле выполняет те функции, которые обычно приписываются скрытым параметрам. Однако, в отличие от ситуации со скрытыми параметрами, здесь приведен пример скрытого поля. Поэтому проблемы существования такого поля нет. Все доводы, которые обычно приводятся против скрытых параметров, в случае скрытого поля не имеют доказательной силы.

В отличие от скрытых параметров, скрытое поле частично наблюдаемо. Оно влияет на поведение kernа квантового объекта в случае, когда этот kern когерентен скрытому полю. В свою очередь, детектор классического измерительного прибора реагирует на kern. На скрытое поле, потерявшее когерентность с kernом, классический прибор никак не реагирует. Однако это не означает, что скрытое поле исчезло. Оно может проявить себя в виде темной материи или темной энергии.

Представление о том, что квантовый объект состоит из ядра и скрытого поля, позволяет дать наглядную, согласующуюся с принципами локальности и причинности интерпретацию большого количества квантовых эффектов, в которых эти принципы, вроде бы, нарушаются.

Начнем рассмотрение с эффекта Аронова–Бома.

16. ЭФФЕКТ АРОНОВА–БОМА

Эффект Аронова–Бома (эффект АБ) является одним из ключевых эффектов квантовой физики. Он теснейшим образом связан с целым рядом принципиальных проблем квантовой теории. К ним относятся проблема квантовых измерений, соотношение между квантовыми величинами и их классическими аналогами, проблема локальности и причинности.

Эффект был теоретически предсказан в 1959 г. [63] и год спустя получил первое экспериментальное подтверждение [64]. Однако к этому результату и целому ряду последующих экспериментальных подтверждений было высказано много претензий.

Развернулась очень оживленная дискуссия, в которой ставилось под сомнение существование эффекта. Значительно позже в 1986 г. группе профессора Тономуры [65] удалось окончательно экспериментально доказать, что эффект АБ действительно существует.

Уже в работе [63] из наличия эффекта предлагалось сделать вывод, что «... в отличие от классической механики, существует воздействие потенциалов на заряженную частицу, даже если в области, где она находится, все поля (и, следовательно, силы, действующие на частицу) исчезают», и поэтому «необходимо дальнейшее развитие теории». В работе было предложено два направления такого развития: во-первых, можно отказаться от условия локальности, во-вторых, можно в квантовой теории отвести потенциалам особую роль. В недавно опубликованной статье [66] Аронова и его сотрудников упор делается на нелокальность. Здесь мы сделаем упор на вторую возможность.

Принципиальная схема мысленного и первого реально осуществленного эксперимента изображена на рис. 4.

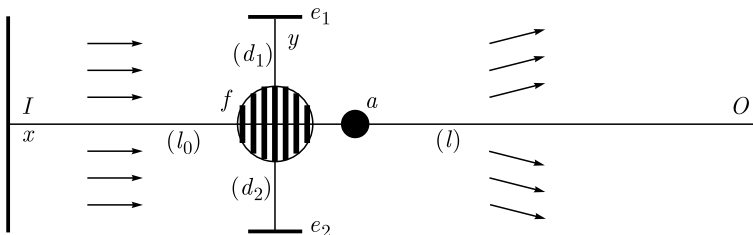


Рис. 4. Принципиальная схема эффекта АБ

Эксперимент состоит в следующем. Пучок электронов с одинаковыми импульсами падает слева на бипризму $[e_1 f e_2]$. Бипризма состоит из алюминированной кварцевой нити f диаметром 1,5 мкм и двух электродов e_1 и e_2 . В тени нити f помещается тонкий соленоид бесконечной длины (в мысленном эксперименте), или длинный намагниченный стержень a диаметром 1 мкм (в реальном эксперименте). Нить и стержень перпендикулярны плоскости рисунка. Чтобы упростить математические выкладки в эксперименте, изображенном на рисунке, в качестве источника электронов принята пластина I , перпендикулярная плоскости рисунка. В реальном эксперименте в качестве источника использовался электронный микроскоп, который, скорее, следовало бы изобразить в виде точки. Но так как расстояния l_0 и l ($l_0 \sim 6,5$ см, $l \sim 13,5$ см) много больше диаметров нити и стержня, это вносит несущественное искажение в окончательный результат.

Нить f разделяет падающий поток электронов на две части. Одна проходит через щель (d_1), другая — через щель (d_2). На нить накладывается небольшой положительный потенциал, благодаря которому после обхода нити f и стержня a эти две части объединяются в единый поток электронов, рассеянных в бипризме. Падая на экран O , эти электроны образуют интерференционные полосы.

Вне стержня a напряженность магнитного поля равна нулю. Поэтому согласно классической электродинамике интерференционная картина на экране не должна зависеть от величины потока магнитной индукции, идущего по стержню a . С другой стороны, значение \mathbf{A} векторного потенциала в области прохождения электронов не может везде равняться нулю, так как согласно теореме Стокса интеграл от \mathbf{A} по любому замкнутому контуру вокруг стержня a должен равняться потоку магнитной индукции через этот контур. Наличие зависимости интерференционной картины от потока магнитной индукции и называется эффектом АБ.

При квантовом рассмотрении картина процесса существенно образом меняется. В уравнение Шредингера для электрона входит именно векторный потенциал $\hat{\mathbf{A}}$, а не напряженность магнитного поля. Поэтому векторный потенциал влияет на поведение электрона даже в том случае, когда волновая функция электрона исчезающе мала в области, где напряженность магнитного поля отлична от нуля. Это дало основание Аронову и Бому сделать предположение об особой роли потенциалов в квантовой теории. Они даже вынесли это утверждение в заголовок своей статьи [63].

Как уже было упомянуто, эффект АБ сразу же вызвал оживленную дискуссию, предварительные итоги которой были подведены в статье Фейнберга [67]. В своей статье Фейнберг обосновывает утверждение, что эта роль не такая уж особая, что нечто подобное можно увидеть и при классическом рассмотрении. Далее мы попытаемся выявить физические причины влияния магнитного стержня на поведение рассеянных электронов.

Сначала опишем динамику в физических, интуитивно понятных терминах. Затем постараемся все это облачить в математическую форму. По предположению рассматриваемая физическая система однородна вдоль оси, перпендикулярной плоскости рисунка. Поэтому будем считать, что все события происходят в плоскости рисунка. Рассмотрение начнем с левого края рисунка.

Источник I излучает поток электронов. Как объяснялось в разд. 14, посвященном строению атома, это не множество свободных электронов, а множество маркированных волн $|\beta_k\rangle$. У всех этих волн один и тот же волновой вектор \mathbf{k} , направленный вдоль оси x . У каждой волны есть один маркер, расположенный случайным образом. В дальнейшем каждой волне мы будем сопоставлять вектор гильбертова пространства. Поэтому с самого начала будем обозначать волны теми же символами, что и соответствующие векторы гильбертова пространства.

Нить f расщепляет волну на две когерентные части: $|d_1\rangle$ и $|d_2\rangle$, которые пойдут соответственно в щели d_1 и d_2 . Электрон (маркер) случайным образом пойдет с одной из частей. При прохождении щелей волновые векторы волн получают случайные небольшие отклонения по направлению оси y . Кроме того, теорема Стокса утверждает, что намагниченный стержень влияет на структуру электромагнитного поля. В частности, он влияет на мягкие фотоны, образующие маркированную волну. В результате волны $|d_1\rangle$ и $|d_2\rangle$, оставаясь когерентными, приобретут разность фаз. Это может повлиять на величину отклонений волнового вектора. Благодаря положительному потенциалу на нити f после прохождения щелей волны $|d_1\rangle$ и $|d_2\rangle$ когерентно складываются. В получившейся волне волновой вектор уже не будет направлен по оси x . В результате при попадании мягких фотонов на экран O они могли бы образовать на нем интерференционную картину. Однако эти фотоны обладают слишком малой энергией, чтобы оставить регистрируемый след.

Вместе с тем в каждой маркированной волне, помимо мягких фотонов, присутствует один электрон. Этот электрон обладает достаточной энергией, чтобы оставить след на экране в виде точки. В действительности на экран попадет не одиночная маркированная волна, а ансамбль таких волн, в каждой из которых имеется по одному электрону. Эти электроны нарисуют на экране уже видимую интерференционную картину. В силу сказанного в разд. 14 эта картина должна быть видимой копией невидимой интерференционной картины, образованной мягкими фотонами одной маркированной волны.

Для электрона намагниченный стержень a находится в тени нити f . Поэтому непосредственно электрон со стержнем a не взаимодействует. С другой стороны, как уже указывалось, всякая волна, в том числе маркированная, является относительно устойчивой конструкцией. Это означает, что между множеством мягких фотонов и электроном, входящими в одну маркированную волну, взаимодействие должно быть существенным. Иными словами, через посредника электрон с магнитным

стержнем взаимодействует. Если забыть о посреднике, то это взаимодействие выглядит как нелокальное. Но локальность как общий принцип теории не нарушается.

Теперь приступим к математическому расчету интерференционной картины, рисуемой электронами. В свете сказанного выше, при этом можно следить не за электронами, а за мягкими фотонами маркированных волн. Ансамбли таких волн будем описывать соответствующими векторами гильбертова пространства. В своих расчетах будем ориентироваться на соотношение (19) разд. 5:

$$\hat{p}_0 \hat{C} \hat{p}_0 = \vartheta(\hat{C}) \hat{p}_0.$$

Там строился функционал, описывающий квантовое среднее для случая, когда коммутативная алгебра, определяющая квантовое состояние, содержит одномерный проектор. Начнем с построения подходящего оператора проектирования \hat{p}_0 .

Как уже отмечалось, в алгебраическом подходе необходимо выбрать систему единиц, чтобы все наблюдаемые стали безразмерными. В рассматриваемом случае в качестве единицы длины удобно выбрать ширину каждой из щелей ($|d_1| = |d_2| = d = 1$), а в качестве единицы волнового вектора — ω_k .

Щель d_1 отберет в прошедшей через нее волне мягкие фотоны, координата y которых лежит в интервале $[r, r + 1]$, где r — радиус нити f в единицах d . Поэтому состояние этой волны можно описать вектором

$$|d_1\rangle = 1 \quad \text{при} \quad y \in [r, r + 1] \quad \text{и} \quad |d_1\rangle = 0 \quad \text{в противном случае.}$$

Аналогично

$$|d_2\rangle = 1 \quad \text{при} \quad -y \in [r, r + 1] \quad \text{и} \quad |d_2\rangle = 0 \quad \text{в противном случае.}$$

В результате последующего когерентного сложения этих частей состояние волны будет описываться вектором

$$|s\rangle = 2^{(-1/2)} [|d_1\rangle + \exp(i2\pi\alpha) |d_2\rangle].$$

Здесь параметр α описывает смещение фазы волны $|d_2\rangle$ относительно фазы волны $|d_1\rangle$. Значение этого параметра согласно теореме Стокса определяется магнитным потоком через стержень a .

Основные споры между сторонниками и противниками эффекта АБ сосредоточились именно вокруг этого параметра. Дело в том, что в теореме Стокса фигурирует не напряженность электромагнитного поля, а векторный потенциал $\hat{\mathbf{A}}$. С другой стороны, значение \mathbf{A} векторного потенциала не определено однозначно, а зависит от выбранной калибровки. Поэтому, утверждали противники, векторный потенциал не может быть наблюдаемой величиной и не может порождать физически наблюдаемого эффекта.

В рамках используемого здесь алгебраического подхода такие рассуждения неправомерны, так как требовать определенных значений можно только от тех наблюдаемых, которые стабильны на рассматриваемых элементарных состояниях. Определенность значений не является непременным свойством наблюдаемых. Непременное свойство наблюдаемых — их принадлежность алгебре. Вполне допустимо, что какие-то наблюдаемые не являются стабильными, а их алгебраические комбинации стабильны и имеют определенные значения.

Именно такая ситуация реализуется в эффекте АБ. Вызванное векторным потенциалом изменение фаз каждой из волн $|d_1\rangle$ и $|d_2\rangle$ не имеет определенного значения, но разность фаз является стабильной наблюдаемой и имеет определенное значение. Заметим, что аналогичная ситуация характерна и для классических систем. Скорость какого-то одного классического объекта не имеет определенного значения (зависит от системы координат), а относительная скорость двух объектов имеет определенное значение (является стабильной наблюдаемой).

В формуле (19) оператор проектирования $\hat{\rho}_0$ определяет структуру ансамбля, по которому происходит усреднение наблюдаемой \hat{C} . Соответственно, в нашем случае в качестве такого проектора следует взять оператор $|s\rangle\langle s| = \hat{\rho}_0$. В качестве наблюдаемой \hat{C} возьмем проектор на состояние $|k_y\rangle$, в котором проекция волнового вектора на ось y имеет определенное значение. В координатном представлении это состояние имеет вид $|k_y\rangle = \exp(iy k_y)$.

В этих обозначениях формула (19) приобретает вид $\vartheta(\hat{C})(\hat{C})|s\rangle\langle s| = |s\rangle\langle s||k_y\rangle\langle k_y||s\rangle\langle s|$, что равносильно

$$\vartheta(\hat{C}) = |\langle s|k_y\rangle|^2. \quad (61)$$

Чтобы переписать формулу (61) в безразмерных терминах, нужно в ней сделать замену $k_y \rightarrow k_y/\omega_k \equiv \theta$. Физически θ характеризует угол рассеяния волны мягких фотонов. Соответственно, $\vartheta(\hat{C})$ имеет смысл плотности $\rho(\theta)$ числа мягких фотонов, рассеянных на угол θ . В формуле (61)

$$\langle s|k_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_r^{1+r} dy [e^{i\theta y} + e^{-i\theta y} e^{-i2\pi\alpha y}].$$

Вычисляя интеграл, формулу (61) можно переписать в виде

$$\rho(\theta) = \frac{8}{\theta^2} \cos^2 \left(r\theta + \frac{\theta}{2} + \pi\alpha \right) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (62)$$

В реально проведенном эксперименте $r \sim 10^{-3}$. Поэтому можно положить $r = 0$. Наиболее яркой частью интерференционной картины является центральная ($\theta \sim 0$). Расположение полос в ней управляется косинусом. Видно, что при изменении магнитного потока (при измене-

нии α) интерференционная картина смещается. Именно это смещение и является эффектом АБ.

Непосредственно формула (62) описывает интерференционную картину, которую могли бы нарисовать мягкие фотоны одной когерентной волны. Конечно, энергия этих фотонов слишком мала, чтобы оставить видимый след на регистрирующем экране. Но, как уже отмечалось, при падении на экран большого количества маркированных волн маркеры (электроны) статистически воспроизводят видимую копию этой картины.

Таким образом, мы видим, что для объяснения эффекта АБ не требуется привлекать предположение о нелокальности квантового взаимодействия. Однако такая нелокальность требуется для других целей. Именно она требуется для оправдания процедуры перенормировок (устранения ультрафиолетовых расходимостей). В этом случае в игру вступает нелокальность процедуры измерения. Любой измерительный прибор имеет конечные размеры в четырехмерном пространстве \mathcal{M} и не может уловить деталей взаимодействия на малых расстояниях. В процедуре перенормировок как раз и используется возникающая в этом случае неопределенность.

17. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНА НА ДВУХ ЩЕЛЯХ

По словам Фейнмана [69], это «... такое явление, которое невозможно, совершенно, абсолютно невозможно объяснить классическим образом. В этом явлении таится самая суть квантовой механики».

Несмотря на такое категоричное заявление Фейнмана, попытаемся это проделать классическим образом. То есть не будем использовать не очень понятную «квантовую логику», а постараемся ограничиться привычной «классической логикой».

Конечно, использование классической логики не делает рассеивающиеся электроны классическими частицами. Их квантовую сущность можно учесть, рассматривая их не как свободные частицы, а как маркеры в волнах ненаблюдаемых когерентных мягких фотонов.

Обсудим результаты, полученные ранее уже упомянутой группой Тономуры [70]. В этих опытах исследовалось рассеяние пучка электронов в бипризме, которая по своим физическим свойствам аналогична экрану с двумя щелями.

Принципиальная схема бипризмы приведена в разд. 16. Только в данном случае отсутствовал намагниченный стержень (a). Кроме того, интенсивность пучка была настолько мала, что одновременно в установке в среднем находилось менее одного электрона. Это позволяло пренебречь влиянием взаимодействия электронов между собой на результаты эксперимента. Кроме того, в опыте можно было фиксировать результат прохождения небольшого числа электронов.

Результаты эксперимента приведены на рис. 5, взятом из обзора [70]. Отдельные фотографии соответствуют различным временам экспозиции.

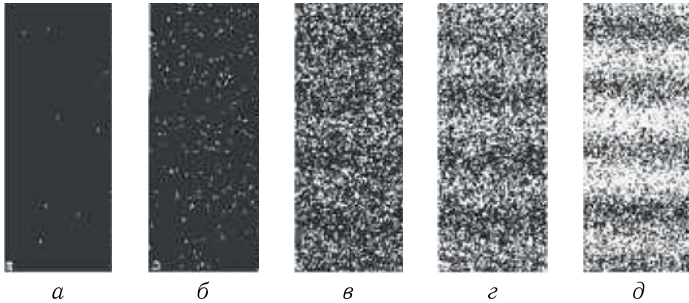


Рис. 5. Интерференционная картина при рассеянии электронов

На фото *а* зарегистрированы следы от 10 электронов, на фото *б* от 200 электронов, на фото *в* от 6000 электронов, на фото *г* от 40 000 электронов, на фото *д* от 140 000 электронов.

Видно, что при регистрации небольшого числа электронов (фото *а* и *б*) никакая интерференционная картина не просматривается. Такая картина проявляется только в случае регистрации очень большого числа электронов (фото *г* и *д*).

Данный опыт говорит в пользу того, что в отдельном электроне волновые свойства не проявляются. Они проявляются только в ансамбле электронов, сформированном специальным образом. В рассматриваемом случае все электроны имели приблизительно одинаковый импульс.

Маркированная волна состоит из огромного числа фотонов, каждый из которых несет очень маленькую порцию энергии. В такой ситуации в хорошем приближении эту волну можно рассматривать как классическую электромагнитную волну. По законам классической оптики она должна интерферировать на двух щелях.

Непосредственно сама волна мягких тормозных фотонов на регистрирующем экране никак не проявляется из-за того, что эти фотоны несут слишком мало энергии. На экране оставляет след маркер. Маркер, подобно поплавку на поверхностной волне на воде, может замещать любой фотон волны. Естественно предположить, что вероятность быть замещенным у всех волновых фотонов одинакова. В этом случае, во-первых, следы от небольшого числа маркеров будут расположены беспорядочно на экране. Во-вторых, следы от большого количества маркеров на регистрирующем экране будут располагаться с плотностью, пропорциональной вероятности попадания в данное место мягких волновых фотонов. Соответственно, на регистрирующем экране возникнет интерференционная картина. Именно такой результат был получен в опытах Тономуры.

Этот результат может быть подтвержден квантово-механическим расчетом, выполненным в рамках используемого нами алгебраического под-

хода. Но новый расчет можно не проводить, а воспользоваться результатом расчета, выполненного в предыдущем разделе.

Кроме применения источника электронов очень малой интенсивности, единственным отличием используемой при изучении рассеяния электронов на двух щелях установки от установки в эксперименте для исследования эффекта Аронова–Бома является отсутствие намагниченного стержня. Поэтому мы можем повторить все выкладки предыдущего раздела, а в окончательном результате положить α равным нулю.

В результате для плотности числа электронов, рассеянных на угол θ , мы получим выражение

$$\rho(\theta) = \frac{8}{\theta^2} \cos^2 \left(r\theta + \frac{\theta}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (63)$$

Непосредственно формула (63) описывает интерференционную картину, которую могли бы нарисовать мягкие фотоны одной когерентной волны. Но, как уже отмечалось, энергия этих фотонов слишком мала, чтобы оставить видимый след на регистрирующем экране. Однако при падении на экран большого количества маркированных волн маркеры (электроны) статистически воспроизводят видимую копию этой картины.

В каждом отдельном событии электрон оставлял на поглощающем экране точечный след. Это вполне соответствует приведенной нами картине рассеяния электрона. В каждом отдельном событии мы имеем дело с одним электроном, который является носителем корпускулярных свойств и регистрируется в виде точки на экране. Сопровождающие его мягкие фотоны, являющиеся носителями волновых свойств, имеют слишком малую энергию, чтобы оставить какой-либо след на экране. Таким образом, для интерпретации результата эксперимента не надо привлекать предположение о коллапсе квантового состояния, который, с точки зрения классической физики, представляется крайне неестественным и противоречащим теории относительности.

18. СВЕТОДЕЛИТЕЛИ

Большинство современных экспериментов, в которых исследуются свойства локальности и причинности, проводятся с фотонами. Поэтому прежде чем далее рассматривать конкретные эксперименты, опишем принципы действия двух наиболее часто используемых оптических приборов.

Первый оптический прибор — это поляризационный светоделитель PBS. Он служит для разделения пучка фотонов на два подпучка, поляризованных в двух взаимно ортогональных направлениях. Геометрия прибора определяет три ортогональных направления (ортогональный поляризационный базис): **I** — направление падающего пучка, **H** — горизонтальное направление, **V** — вертикальное направление. Если падающий пучок фотонов поляризован горизонтально, то после прохождения PBS

фотоны распространяются по направлению \mathbf{H} , если поляризован вертикально, то по направлению \mathbf{V} . Если падающий пучок поляризован под некоторым углом ϑ ($\vartheta \neq \pi n/2$), то часть проходящих через PBS фотонов распространяется по направлению \mathbf{H} и приобретает горизонтальную поляризацию, а другая — по направлению \mathbf{V} и приобретает вертикальную поляризацию.

Применительно к отдельному фотону пучка это физическое явление имеет существенно различные толкования в стандартном квантово-механическом подходе и в описанном алгебраическом подходе. В стандартном подходе о поляризации отдельного фотона предпочитают вообще не говорить. Если известно, что фотон принадлежит поляризованному пучку, то говорят, что он имеет соответствующую поляризацию. Если же о предыстории фотона нет никакой информации, то говорят, что он не имеет никакой поляризации. Говорят, что он приобрел определенную поляризацию (горизонтальную или вертикальную) только после прохождения PBS. Процесс этот случайный и не обусловлен никакой физической реальностью.

В предложенном подходе трактовка существенно иная. Каждый фотон находится в определенном элементарном состоянии. Это элементарное состояние описывает физическую реальность, которая предопределяет результат взаимодействия фотона с PBS при любой ориентации горизонтального и вертикального направлений, т. е. в любом поляризационном базисе. Таким образом, заранее предопределено, по какому из двух возможных направлений будет распространяться фотон после прохождения PBS при заданной ориентации поляризационного базиса. Однако если заранее не известно, что в этом базисе фотон имеет определенную поляризацию (принадлежит пучку, имеющему вертикальную или горизонтальную поляризацию), то соответствующего предсказания мы сделать не можем.

В результате наблюдения за фотоном, прошедшим PBS, мы некоторую информацию приобретаем. Именно, мы узнаем, какую поляризацию имел фотон в поляризационном базисе, связанном с PBS. При прохождении PBS поляризация фотона, в общем случае, меняется неконтролируемым образом. Однако если PBS реализует воспроизводимое измерение, то по направлениям поляризационного базиса PBS поляризация не меняется. По другим направлениям она меняется. Таким образом, мы можем приобрести информацию о поляризации фотона по любому направлению, но только по одному.

Второй прибор — это (простой) светоделитель BS, который служит для разделения когерентного пучка фотонов на два подпучка или для смешивания двух пучков фотонов. Наглядно этот прибор можно представить в виде полупрозрачной пластины (рис. 6), на которую с двух сторон в одной плоскости, перпендикулярной пластине, и под одинаковыми углами падают пучки поляризованных фотонов.

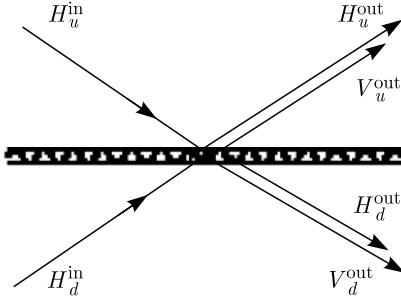


Рис. 6. Простой светоделитель

В этом случае геометрия прибора также определяет поляризационный базис. Будем считать, что горизонтальное направление лежит в плоскости пучков, вертикальное — перпендикулярно этой плоскости.

Если фотоны из двух пучков падают на пластину не одновременно, то каждый из них без изменения поляризации либо отражается с изменением фазы на $\pi/2$. Эти два варианта случайны и имеют одинаковую вероятность. Если же два фотона из разных пучков падают на пластину одновременно, то они интерферируют согласно правилу

$$\begin{aligned}
 |H, V\rangle_u^{\text{in}} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [|H, V\rangle_u^{\text{out}} + |H, V\rangle_d^{\text{out}}], \\
 |H, V\rangle_d^{\text{in}} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [|H, V\rangle_u^{\text{out}} - |H, V\rangle_d^{\text{out}}].
 \end{aligned}
 \tag{64}$$

В формулах (64) $|H, V\rangle$ означает, что фотон имеет либо горизонтальную поляризацию, т.е. находится в квантовом состоянии $|H\rangle$, либо вертикальную, т.е. находится в квантовом состоянии $|V\rangle$. В каждой строке (64) поляризация слева и справа одна и та же, в разных строках поляризации могут быть разными. Индекс $u(d)$ обозначает, что фотон принадлежит верхнему (нижнему) пучку, а индекс in(out) обозначает, что фотон принадлежит входящему (выходящему) пучку.

19. ЭКСПЕРИМЕНТ С ОТСРОЧЕННЫМ ВЫБОРОМ

Идея о маркированных волнах, в которых в качестве маркеров выступают достаточно энергичные фотоны, позволяет дать очень наглядную интерпретацию так называемого эксперимента с отсроченным выбором.

В традиционном подходе обычно двойственное поведение квантовой системы (волна или частица) объясняется влиянием окружающей среды. Так, говорится, что при взаимодействии со щелями электрон ведет себя как волна, а при взаимодействии с регистрационным экраном — как

частица. Для испытания такого способа объяснения сорок лет тому назад Уилером [71] был предложен мысленный эксперимент, который недавно удалось реализовать почти в идеальном виде [72].

Принципиальная схема экспериментальной установки изображена на рис. 7. В варианте, предложенном Уилером, вместо светоделителей BS_{in} и BS_{out} фигурировали полупрозрачные зеркала. Установка представляет собой интерферометр Маха–Цендера с длинными плечами. В реальном эксперименте они имели длину 48 м. На классическом уровне принцип действия установки выглядит очень просто.

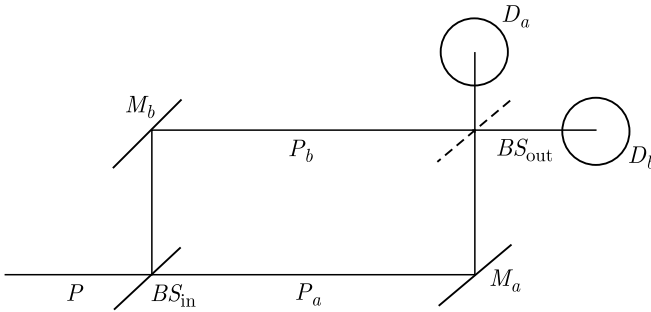


Рис. 7. Принципиальная схема эксперимента с отсроченным выбором

На входное полупрозрачное зеркало (светоделитель BS_{in}) подается пучок фотонов (P). В этом зеркале пучок разделяется на две когерентные части P_a и P_b , которые следуют путями a и b , по пути отражаясь от зеркал M_a и M_b . Далее возможны два состояния установки. Первое — когда выходное зеркало (светоделитель BS_{out}) отсутствует. Говорят, что интерферометр разомкнут. В этом случае каждая часть попадает в соответствующий детектор (D_a или D_b). Второе состояние — выходное зеркало присутствует (замкнутый интерферометр). В этом случае в выходном зеркале происходит когерентное сложение обеих частей пучка. Результат такого сложения определяется тем, что при отражении от зеркала фаза меняется на $\pi/2$, а при прохождении сквозь зеркало фаза не меняется. Учитывая это, элементарно установить, что после сложения в выходном зеркале весь пучок попадет в детектор D_b .

На квантовом уровне картина оказывается значительно более интересной. Чтобы получить эту картину в чистом виде, интенсивность пучка резко уменьшают так, чтобы одновременно в установке мог находиться не более чем один фотон. Каждый из этих фотонов может обладать как корпускулярными, так и волновыми свойствами. Будем считать, что в зависимости от состояния окружающей обстановки (от состояния экспериментальной установки) он проявляет либо корпускулярные свойства, либо волновые. Если корпускулярные, то в результате взаимодействия с входным зеркалом фотон случайным образом выбирает один из путей.

Если волновые, то во входном зеркале волна разделяется на две части и распространяется по обоим путям.

Пусть состояние установки таково, что выходное зеркало отсутствует. Тогда при корпускулярном поведении фотона будет срабатывать один из детекторов. Фиксируя, какой из детекторов сработал, мы можем установить, какой из путей выбрал фотон во входном зеркале. При волновом поведении должны одновременно сработать оба детектора. Теперь пусть состояние установки таково, что выходное зеркало присутствует. Тогда при корпускулярном поведении фотона опять-таки случайным образом будет срабатывать один из детекторов. При волновом поведении всегда будет срабатывать детектор D_b .

Таким образом, чтобы квантовая картина соответствовала классической, при отсутствии выходного зеркала фотон должен вести себя как частица, т. е. выбирать один из путей. Если же выходное зеркало присутствует, то фотон должен вести себя как волна и после входного зеркала распространяться по обоим путям.

Выбор отдельного пути или обоих сразу фотон, вроде бы, должен сделать в момент прохождения входного зеркала. Чтобы «сбить с толку» фотон, Уилер предложил принимать решение, вставлять или не вставлять выходное зеркало после того, как фотон прошел входное зеркало, а осуществлять это решение до того, как фотон достигнет места расположения выходного зеркала. Таким образом, при прохождении входного зеркала для фотона «еще будет не ясна окружающая обстановка». Тем не менее чтобы воспроизвести классическую картину, фотон каждый раз должен делать правильный выбор, т. е. он должен заранее угадывать прихоть экспериментатора.

Реально осуществить предложенную Уилером манипуляцию с зеркалом оказалось очень трудно. Нужно было уложиться в 160 нс, которые тратит фотон на прохождение базы (48 м) интерферометра. Экспериментаторам удалось осуществить все требуемые манипуляции за 40 нс. Конечно, с полупрозрачным зеркалом этого сделать нельзя. Поэтому вместо зеркала использовался светоделитель, который включался и выключался электрооптическим модулятором. При этом решение включать или выключать светоделитель принимал генератор случайных чисел. Геометрия установки была такова, что никакой сигнал, распространяющийся со скоростью не больше скорости света, не мог перенести информацию о принятом решении к входному светоделителю до момента прохождения через него исследуемого фотона.

Несмотря на все эти меры предосторожности, фотон прекрасно предугадывал решения генератора случайных чисел. Это означает, что в интервале времени между моментами прохождения входного и выходного светоделителей у фотона нет альтернативы быть локализованным в одном из плечей интерферометра или в обоих сразу. Каким-то таинственным образом одновременно реализуются обе эти возможности. Формально это не противоречит стандартному математическому аппарату квантовой

механики. Но сколько-нибудь наглядную физическую картину этого явления составить не удастся.

В противоположность этому в терминах элементарного состояния, ядра и скрытого поля физическая картина явления выглядит очень просто. Фотон, попадая во входной светодетектор, взаимодействует с ним. В зависимости от элементарного состояния фотона его ядро либо отражается в светодетекторе, либо проходит его насквозь. Одновременно в результате взаимодействия рождается скрытое поле, когерентное ядру. В данном случае скрытое поле — это мягкие тормозные фотоны, а ядро — это достаточно жесткий регистрируемый фотон. Скрытое поле разделяется на две части, одна из которых распространяется по одному пути, другая по другому. Таким образом, в упомянутом в предыдущем абзаце интервале времени ядро падающего фотона и одна из частей скрытого поля локализованы в одном плече интерферометра, вторая часть скрытого поля — в другом плече. Все части фотона сохраняют между собой когерентность.

В выходном светодетекторе обе части скрытого поля когерентно складываются, порождая малые вторичные колебания в множестве тормозных фотонов, когерентные ядру. Эти вторичные колебания резонансно взаимодействуют с ядром. С учетом сдвига фаз частей скрытого поля результирующее скрытое поле и ядро после выходного светодетектора распространяются в сторону детектора D_2 . При попадании ядра в детектор последний регистрирует этот факт.

При выключенном выходном светодетекторе ядро продолжает выбранный во входном светодетекторе путь и попадает в один из детекторов, где происходит его регистрация. Распространяющаяся по другому пути часть скрытого поля попадает в другой детектор. Но на скрытое поле детектор не реагирует. В этом случае картина выглядит так, как будто фотон обладает только корпускулярными свойствами. Таким образом, общая картина представляется весьма наглядной и полностью согласующейся с принципами локальности и причинности.

20. КВАНТОВЫЙ ЛАСТИК ГРУППЫ ЦАЙЛИНГЕРА

Понятия ядра и скрытого поля позволяют дать вполне наглядную интерпретацию явления, которое получило название квантового ластика.

Сначала обсудим эксперимент группы Цайлингера [73]. Были реализованы два варианта эксперимента. Первый — венский с базой 55 м. Второй — канарский с базой 144 км. Результаты обоих экспериментов были идентичны, и мы обсудим только первый вариант.

Принципиальная схема эксперимента изображена на рис. 8, взятом из статьи [73]. Регистрирующие элементы были расположены в трех лабораториях, удаленных друг от друга на расстояния, которые обеспечивали то, что эксперименты в разных лабораториях были разделены между собой пространственноподобными интервалами. Основываясь на этом,

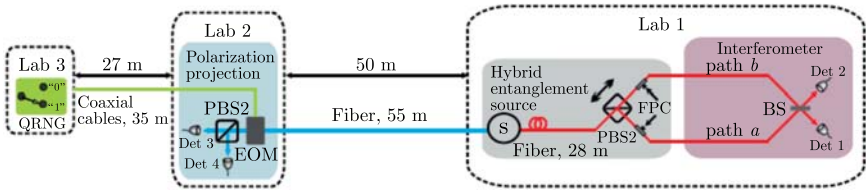


Рис. 8. Схема венского эксперимента

авторы эксперимента заявили, что их результаты противоречат эйнштейновскому условию локальности. Мы сейчас убедимся, что противоречия можно избежать.

В эксперименте используется пара фотонов: сигнальный фотон (s) и фотон окружения (e). Эта пара находится в запутанном состоянии

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|H\rangle_s |V\rangle_e + |V\rangle_s |H\rangle_e \right],$$

где H и V означают горизонтальную и вертикальную поляризации.

Источником (S) таких фотонов является нелинейный кристалл, облучаемый ультрафиолетовым лазером. Лазерные фотоны рассеиваются в кристалле. Как правило, при таком рассеянии один фотон на входе дает один фотон на выходе. Однако иногда с гораздо меньшей вероятностью один фотон порождает два фотона, суммарная энергия которых равна энергии входящего фотона. Такое явление получило название «параметрическое преобразование частоты вниз». В зависимости от свойств кристалла между поляризациями фотонов в паре реализуются разного типа корреляции. Если фотоны рождаются с ортогональными поляризациями, то говорят, что это преобразование второго типа.

Один из фотонов пары (фотон (s)) направляется в лабораторию 1. Другой (фотон (e)) направляется в лабораторию 2. Там он попадает в электрооптический модулятор ЕОМ, который может находиться в двух состояниях: включен, выключен. Включение и выключение производится генератором случайных чисел QRNG.

Когда модулятор ЕОМ выключен, фотон (e) проходит через него без изменения своей поляризации. Когда модулятор включен, циклическая поляризация фотона (e) меняется на линейную. После модулятора ЕОМ фотон (e) попадает в поляризационный светоделитель PBS2. В зависимости от своей линейной поляризации фотон (e) направляется либо в детектор Det3, либо в детектор Det4.

Партнер фотона (e) — фотон (s) направляется в поляризационный светоделитель PBS1. После него он, в зависимости от своей поляризации, направляется либо в плечо (a), либо в плечо (b) интерферометра. Смещая светоделитель PBS1, можно изменять разность оптических длин этих плеч. Далее фотон (s) попадает в простой светоделитель BS, после которого направляется либо в детектор Det1, либо в детектор Det2.

Для набора статистики эксперимент многократно повторяется в двух режимах: ЕОМ включен, ЕОМ выключен. В обоих режимах измерения проводятся при различных смещениях светоделителя PBS1. Результат набора статистики следующий. При выключенном модуляторе ЕОМ вероятность фотону (s) попасть в каждый из детекторов Det1 и Det2 равна $1/2$ и не зависит от положения светоделителя PBS1. При включенном модуляторе ЕОМ вероятность зависит от положения светоделителя PBS1. График этой зависимости имеет вид типичной интерференционной картины.

Одновременно с этим установлено следующее. При выключенном модуляторе ЕОМ щелчки детекторов Det3 и Det4 однозначно фиксируют плечи (a) и (b), по которым распространяется фотон (s). При включенном модуляторе ЕОМ эти щелчки такой информации не дают.

Внешне все выглядит так, как будто генератор случайных чисел QRNG влияет на поведение фотонов, которые попадают в детекторы Det1 и Det2. При этом справедлив следующий принцип дополнительности. При выключенном модуляторе ЕОМ можно (с помощью детекторов Det3 и Det4) получить информацию о том, по какому пути распространяется фотон (s), но интерференционная картина не возникает. При включенном модуляторе ЕОМ информация о пути следования фотона (s) стирается, но возникает интерференционная картина. Вроде бы, принцип причинности нарушается.

Сейчас мы убедимся, что такого вывода можно избежать. Будем считать, что источник (S) испускает не отдельные фотоны (s) и (e) в некоторых квантовых состояниях, а маркированные волны, в которых эти фотоны являются маркерами. Как отмечалось ранее, при наборе статистики получающемуся ансамблю маркеров соответствует определенное когерентное квантовое состояние. Этому же квантовому состоянию соответствует ансамбль мягких фотонов, образующих когерентную волну де Бройля. Математически квантовое состояние может быть описано вектором гильбертова пространства, но гильбертово пространство плохо приспособлено для описания локальных свойств.

В противоположность этому волна мягких фотонов является физическим объектом, имеющим вполне определенные локальные свойства. Поэтому мы постараемся проследить связь между математическими операциями над векторами гильбертова пространства и физическими операциями над соответствующей волной мягких фотонов.

Сначала рассмотрим случай, когда модулятор ЕОМ выключен. После ЕОМ волна с маркером (e) попадет в поляризационный светоделитель PBS2. В зависимости от поляризации она направится либо в детектор Det3, либо в Det4. Для определенности будем считать, что при поляризации H волна попадет в детектор Det4. В таком случае щелчок детектора Det4 будет означать, что испущенная источником (S) волна с маркером (e) имела поляризацию H , а ее партнер, волна с маркером (s), имела поляризацию V . Соответственно, после прохождения поляризационного

светоделителя PBS1 она пойдет в плечо (b) интерферометра. Обозначим вектор квантового состояния этой волны через $|b\rangle$.

По плечу (b) эта волна достигнет простого светоделителя BS. При этом фаза волны изменится на угол φ , величина которого зависит от длины плеча. В светоделителе BS волна разделится на две части. Половина мягких фотонов пройдет без изменения фазы насквозь в виде волны ($d1$), идущей к детектору Det1, другая половина с изменением фазы на $\pi/2$ отразится и в виде волны ($d2$) пойдет к детектору Det2. Для каждого волнового фотона вероятность попасть в любой из двух детекторов равна $1/2$ и не зависит от угла φ .

В терминах гильбертова пространства этот процесс выглядит следующим образом. Сдвиг фазы: $|b\rangle \rightarrow e^{i\varphi}|b\rangle$. Прохождение через светоделитель BS:

$$e^{i\varphi}|b\rangle \rightarrow |d\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\varphi}|d_1\rangle + e^{i(\varphi+\pi/2)}|d_2\rangle \right]. \quad (65)$$

Здесь

$$\widehat{d}_i|d_j\rangle = \delta_{ij}|d_j\rangle, \quad \langle d_i|d_j\rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2),$$

где щелчок детектора Det(i) — это значение 1 наблюдаемой \widehat{d}_i . Очевидно $\langle d|\widehat{d}_i|d\rangle = 1/2$.

Теперь рассмотрим случай, когда модулятор включен. Для определенности будем считать, что правополяризованные фотоны модулятор переводит в горизонтально поляризованные фотоны, а левополяризованные — в вертикально поляризованные. В этом случае щелчок детектора Det3 означает, что при испускании фотона (e) из источника (S) он имел поляризацию R . Соответственно, его напарник фотон (s) должен иметь поляризацию L . Аналогичным образом щелчок детектора Det4 свидетельствует о том, что фотон (s) имеет поляризацию R .

При включенном модуляторе интерференционная картина наблюдается. Но она видна только после набора статистики, т. е. когда мы имеем дело не с отдельными событиями, а с ансамблями событий. В рассматриваемом случае это будут квантовые ансамбли, для которых справедлив постулат 6 разд. 3.

Напомним, что там строился функционал, описывающий квантовое среднее в том случае, когда коммутативная алгебра, определяющая квантовое состояние, содержит одномерный проектор.

Для примера рассмотрим случай, когда щелкнул детектор Det3. Это означает, что соответствующий фотон (s) имеет поляризацию L . Когерентные ему темные (тормозные) фотоны также будут иметь поляризацию L . В нашем подходе это не означает, что они не имеют никакой линейной поляризации. Этот факт означает другое: в множестве таких левополяризованных фотонов половина фотонов имеет поляризацию V , а другая половина имеет поляризацию H .

В результате, на выходе светоделителя PBS1 мы будем иметь следующую картину. Фотон (s) пойдет по одному из путей (a) или (b),

а когерентная с ним волна темных фотонов разобьется на две части. Одна из них пойдет по пути (a) , а другая пойдет по пути (b) . Непосредственно после светоделителя PBS1 фотоны в разных частях будут иметь ортогональные поляризации. Однако после прохождения регуляторов поляризации FPS все фотоны станут одинаково поляризованными.

Попав на светоделитель BS, обе волны когерентно сложатся с учетом сдвига фаз. Этот сдвиг фаз зависит от разности оптических длин путей (a) и (b) . Следовательно, количество волновых фотонов, попавших в детектор Det1 и в детектор Det2, будет зависеть от фазового сдвига. Так как при наборе статистики вероятность маркеру попасть в каждый из этих детекторов равняется вероятности попасть в этот детектор волновому фотону, то при включенном модуляторе ЕОМ будет наблюдаться интерференционная картина.

Опять посмотрим, как этот физический процесс можно изобразить в терминах гильбертова пространства. На входе светоделителя PBS1 мы имеем волну мягких фотонов, которая описывается вектором

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle - i|V\rangle]. \quad (66)$$

Далее в подобной ситуации будем говорить, что имеем волну (66). Светоделитель PBS1 преобразует ее в волну

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [|a\rangle - i|b\rangle].$$

После регулятора PPC волны $|a\rangle$ и $|b\rangle$ будут иметь одинаковую поляризацию. За счет смещения светоделителя PBS1 на входе светоделителя BS будем иметь волну

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i\varphi}|a\rangle - i e^{i\varphi}|b\rangle].$$

Согласно формуле (65) светоделитель BS преобразует ее в волну

$$|d'\rangle = [-i \sin \varphi |d_1\rangle + \cos \varphi |d_2\rangle].$$

Отсюда следует

$$\langle d' | \hat{d}_1 | d' \rangle = \sin^2 \varphi, \quad \langle d' | \hat{d}_2 | d' \rangle = \cos^2 \varphi.$$

При щелчке Det4 \hat{d}_1 и \hat{d}_2 меняются местами.

Модулятор ЕОМ никак не влияет на значение наблюдаемых \hat{d}_1 и \hat{d}_2 для каждого конкретного фотона (s) . Он влияет на множество событий, по которому происходит усреднение значений этих наблюдаемых. Так как обработка данных производится после окончания всех этапов эксперимента, то совершенно безразлично, как этапы отделены друг от друга.

Таким образом, никакого противоречия между эйнштейновским принципом причинности и результатами данного эксперимента нет.

21. КВАНТОВЫЙ ЛАСТИК ГРУППЫ КИМА

Теперь рассмотрим эксперимент, выполненный группой Кима [74]. В этом эксперименте события, коррелированные друг с другом, не разделены между собой пространственноподобным интервалом. Это пример эксперимента с отсроченным выбором, в котором будущее, вроде бы, влияет на прошлое.

Его принципиальная схема изображена на рис. 9, взятом из статьи [74]. В этом эксперименте также используются запутанные фотонные пары, полученные с помощью параметрического преобразования частоты вниз второго типа. Ультрафиолетовый лазер через решетку с двумя щелями облучает нелинейный кристалл ВВО в двух областях А и В. В каждом отдельном событии одна из этих областей является источником запутанной пары фотонов: сигнальный фотон (s) и фотон окружения (e). Фотон (s) направляется на линзу LS, в фокальной плоскости которой расположен детектор D_0 . Этот детектор может перемещаться по фокальной плоскости и регистрировать количество фотонов (s), попадающих в различные точки плоскости.

Фотон (e) направляется в интерферометр с плечами одинаковой оптической длины. Интерферометр состоит из призмы, трех простых светоделителей 50:50 (BSA, BSB, BS) и двух зеркал M_A и M_B . Так как зеркала дают одинаковые сдвиги фазы, то в дальнейшем эти сдвиги можно не учитывать. После прохождения интерферометра фотон (e) попадает в один из детекторов D_1, D_2, D_3, D_4 (детектор D_4 на рисунке не изображен). Сигналы от этих детекторов и от детектора D_0 подаются в систему совпадений, которая позволяет установить для каждого фотона (s), в какой из детекторов D_1, D_2, D_3, D_4 попал его напарник — фотон (e).

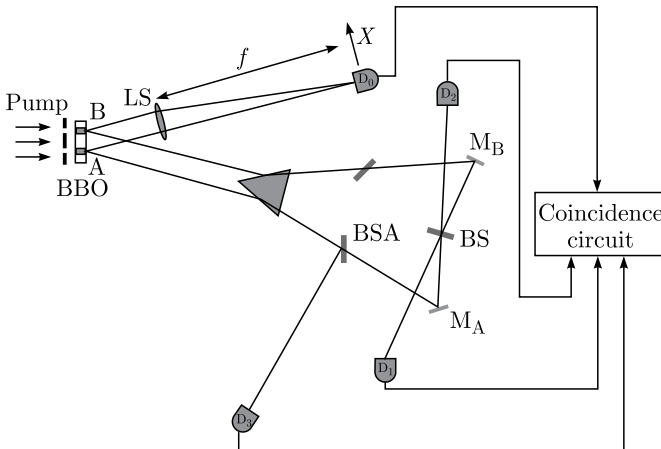


Рис. 9. Схема эксперимента группы Кима

Габариты установки подобраны таким образом, что время прохождения фотона (s) до детектора D_0 значительно меньше времени прохождения его напарника (e) до детектора регистрации.

Проследим за какой-нибудь одной запутанной парой фотонов (s) и (e). Пусть пара рождается в области A . Фотон (s), пройдя линзу LS , попадает в детектор D_0 . Его напарник (e), отразившись от призмы, попадает в светоделитель BSA . После светоделителя он с вероятностью $0,5$ попадет в детектор D_3 , где будет зарегистрирован. С такой же вероятностью этот фотон направится к зеркалу M_A , после которого он попадет в светоделитель BS . После этого светоделителя он опять с вероятностью $0,5$ попадет в детектор D_2 , где будет зарегистрирован. С такой же вероятностью он направится к зеркалу M_B , после которого попадет в детектор D_1 .

Аналогичным образом ведет себя пара, родившаяся в области B . Единственная разница заключается в том, что вместо детектора D_3 фотон (e) может попасть в детектор D_4 . Таким образом, щелчок детектора D_3 однозначно указывает, что пара родилась в области A , а щелчок детектора D_4 однозначно указывает, что пара родилась в области B . Щелчки детекторов D_1 и D_2 никакой информации о месте рождения пары не дают.

Анализ результатов работы детекторов показывает, что если отбираются события с щелчками детектора D_3 или детектора D_4 , то детектор D_0 никакой интерференционной картины не регистрирует. Обратим внимание на то, что в этих случаях однозначно известно, в какой области родилась фотонная пара.

Если отбираются события с щелчками детектора D_1 или детектора D_2 , то детектор D_0 воспроизводит интерференционные картины. В этих двух случаях информация о месте рождения пары оказывается стертой.

Такой анализ результатов эксперимента позволил авторам сделать вывод, что если из результатов эксперимента нельзя получить информацию о месте рождения пары, то интерференционная картина имеет место, а если такую информацию получить можно, то интерференционная картина отсутствует. Таким образом, вроде бы, наличие или отсутствие интерференционной картины определяется результатами работы детекторов D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , а с другой стороны, сама интерференционная картина строится из показаний детектора D_0 , которые были получены до срабатывания детекторов D_1 , D_2 , D_3 , D_4 . То есть действительно, все выглядит так, как будто бы будущее влияет на прошлое.

Теперь посмотрим, как результаты эксперимента можно проинтерпретировать в рамках концепции маркированных волн. Будем считать, что на решетку вдоль оси z падают не отдельные лазерные фотоны, а маркированные волны, в которых наблюдаемые фотоны являются маркерами. Обозначим ширину каждой щели в решетке через a , а расстояние между

щелям через r . В плоскости решетки направим ось x перпендикулярно щелям.

Ясно, что в формировании интерференционной картины примут участие только те волны, маркеры которых прошли либо через одну щель, либо через другую. Сама интерференционная картина определяется вероятностным распределением k_x — проекций на ось x импульсов маркеров. Таким образом, решетка с двумя щелями сформирует ансамбль физических систем, которые оставят следы на регистрирующем экране.

Каждая из этих систем описывается большим количеством наблюдаемых, относящихся как маркеру, так и к волновым фотонам. В каждой такой системе выделим подсистему с наблюдаемыми: \mathbf{k}_x и \hat{x} . Строго говоря, эти наблюдаемые не являются элементами C^* -алгебры, но элементы C^* -алгебры — их спектральные проекторы $\hat{p}(k)$ и $\hat{p}(x)$. Напомним, что в теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве каждому участку спектра оператора ставится в соответствие определенный проекционный оператор.

Решетка с двумя щелями отбирает подсистемы, в которых маркеры проходят через ту или иную щель. Это значит, что при прохождении решетки координата x любого из этих маркеров будет удовлетворять условию

$$\frac{r}{2} < |x| < \frac{r}{2} + a \quad (67)$$

и эти маркеры будут иметь одно и то же значение наблюдаемой $\hat{p}(x)$ — проектора, соответствующего в спектре участку (67). Так решетка формирует квантовый ансамбль (класс эквивалентности элементарных состояний). В этом ансамбле вероятностное распределение должно удовлетворять постулату 6 из разд. 3, и мы можем воспользоваться формулой (19)

$$\hat{p}_0 \hat{C} \hat{p}_0 = \vartheta(\hat{C}) \hat{p}_0.$$

В этой формуле фигурируют операторы точного представления C^* -алгебры в гильбертовом пространстве, поэтому дальнейшие математические выкладки мы можем производить, используя стандартную технику квантовой механики.

Так как нас будет интересовать только общий вид картины на экране, то мы несколько идеализируем условия эксперимента. В частности, будем считать, что при распаде фотона накачки на фотоны (s) и (e) сохраняются как энергия, так и импульс, и они распределяются между этими фотонами поровну. В действительности это справедливо только в среднем. Для более детальных расчетов можно воспользоваться техникой, рассмотренной в статье [75].

Сначала проследим за событиями, когда щелкнул детектор D_1 . Мы будем следить за маркированными волнами, но так же как в предыдущем разделе, будем изображать их в виде векторов гильбертова пространства, описывающих квантовое состояние этих волн. Опять эти векторы будем

называть волнами. После прохождения решетки мы будем иметь дело с двумя волнами

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [|\chi_A(x)\rangle + |\chi_B(x)\rangle]. \tag{68}$$

Здесь мы ввели две функции

$$\chi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{при} \quad \frac{r}{2} < -x < \frac{r}{2} + a, = 0 \quad \text{в другом случае}$$

и

$$\chi_B(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{при} \quad \frac{r}{2} < x < \frac{r}{2} + a, = 0 \quad \text{в другом случае.}$$

В (68) первое слагаемое соответствует волне с маркером, прошедшим через щель *A*, а второе слагаемое — волне с маркером, прошедшим через щель *B*. В дальнейшем функции $\chi_A(x)$ и $\chi_B(x)$ будут играть роль волновых функций соответствующих квантовых состояний в *x*-представлении. После кристалла ВВО каждое из слагаемых в (68) будет описывать две волны с маркерами (*e*) и (*s*), вышедшими из области *A* или *B*.

Чтобы не загромождать формулы, далее будем опускать слагаемые, соответствующие волнам, идущим к детекторам *D*₃ и *D*₄. После прохождения светоделителей *BSA*, *BSB* и *BS* произойдет еще одно разделение маркированных волн на волны, в которых фотоны (*e*) распространяются в сторону детектора *D*₁ или детектора *D*₂. Результат такого разделения в терминах векторов гильбертова пространства изобразится в виде

$$2^{-1} [|\chi_A(x)\rangle|d_2\rangle + i[|\chi_A(x)\rangle|d_1\rangle + |\chi_B(x)\rangle|d_1\rangle + i|\chi_B(x)\rangle|d_2\rangle] \equiv |\chi, d\rangle,$$

где мы учли изменение фазы волны, маркированной фотоном (*e*), при отражении в светоделителе. Если мы отбираем события, в которых щелкнул детектор *D*₁, то получаем ансамбль волн, маркированных фотонами (*s*), который описывается вектором

$$|\chi_1(x)\rangle \equiv [i|\chi_A(x)\rangle + \chi_B(x)]/\sqrt{2} = \sqrt{2} \langle d_1 | \chi, d \rangle. \tag{69}$$

В терминах теории вероятностей (см., например, [4, 21]) этот ансамбль описывается условной вероятностью

$$P(F_1|F_2) = \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_2)}.$$

В этой формуле $P(F_i)$ — вероятность события F_i , $P(F_1 \cap F_2)$ — вероятность одновременной реализации событий F_1 и F_2 . Хотя здесь используется термин «одновременный», никакого отношения ко времени он не имеет. Он означает, что произошли оба события, а в какой последовательности, или с каким временным промежутком они произошли — совершенно безразлично. $P(F_1|F_2)$ — вероятность события F_1 при условии, что событие F_2 также произошло. В нашем случае $P(F_2) = 1/2$ — вероятность щелчка детектора *D*₁.

Мы легко можем вычислить $R_{01}(k_x) \delta k_x$ — условное среднее число фотонов (s), имеющих x -проекцию импульса в интервале δk_x при условии, что фотон (e) попадет в детектор D_1 . Для этого воспользуемся формулой (19), в которую в качестве проектора \hat{p}_0 подставим оператор $|\chi_1(x)\rangle\langle\chi_1(x)|$, а в качестве \tilde{A} подставим $|k_x\rangle\langle k_x| \delta k_x$. В этом случае формулу (19) можно переписать в виде

$$R_{01}(k_x) \delta k_x = |\langle k_x | \chi_1(x) \rangle|^2 \delta k_x. \quad (70)$$

Здесь

$$\langle k_x | \chi_1(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi\hbar}} \left[\int dx \exp\left(\frac{-ixk_x}{\hbar}\right) (i\chi_A(x) + \chi_B(x)) \right].$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$R_{01}(k_x) \delta k_x = \frac{\hbar}{\pi a k_x^2} \sin^2\left(\frac{a k_x}{2\hbar}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k_x(r+a)}{2\hbar}\right) \delta k_x.$$

Подставляя $k_x \simeq 2\pi\hbar x(f\lambda)^{-1}$, этой формуле можно придать вид

$$R_{01}(x) \delta x \simeq \frac{f\lambda}{2\pi^2 x^2 a} \sin^2\left(\frac{x\pi a}{f\lambda}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x(a+r)\pi}{f\lambda}\right) \delta x. \quad (71)$$

Здесь $R_{01}(x)$ — средняя плотность числа фотонов (s), попадающих в точку x регистрирующего экрана; f — фокусное расстояние линзы, $\lambda = 2\pi\hbar k^{-1}$.

При условии регистрации маркера (e) детектором D_2 аналогичным образом получаем для плотности числа фотонов (s), попадающих в точку x регистрирующего экрана, выражение

$$R_{02}(x) \delta x \simeq \frac{f\lambda}{2\pi^2 x^2 a} \sin^2\left(\frac{x\pi a}{f\lambda}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x(a+r)\pi}{f\lambda}\right) \delta x.$$

Теперь рассмотрим события, когда щелкнул детектор D_3 . Опять, опуская волны с маркером (e), идущие к детекторам D_1 , D_2 и D_4 , в данном случае вместо формулы (69) будем иметь

$$|\chi_3(x)\rangle = i|\chi_A(x)\rangle.$$

Соответственно, для условного среднего числа фотонов (s), у которых x -проекция импульса попадает в δk_x при условии, что фотон (e) зарегистрирован детектором D_3 , вместо формулы (70) получаем

$$R_{03}(k_x) \delta k_x = \frac{1}{2} |\langle k_x | \chi_3(x) \rangle|^2 \delta k_x. \quad (72)$$

Множитель $1/2$ в правой части этой формулы появился из-за того, что в данном случае вклад в среднее число совпадений дает только половина фотонов накачки — это фотоны, прошедшие через щель A . В экспе-

рименте при подсчете числа совпадений в качестве исходной величины бралось число фотонов накачки.

В формуле (72)

$$\begin{aligned} \langle k_x | \chi_3(x) \rangle &= \frac{i}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \exp\left(\frac{-ixk_x}{\hbar}\right) \chi_A(x) = \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi a k_x^2}} \sin\left(\frac{a k_x}{2\hbar}\right) \left[i \cos\left(\frac{k_x(r+a)}{2\hbar}\right) - \sin\left(\frac{k_x(r+a)}{2\hbar}\right) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_{03}(k_x) \delta k_x = \frac{\hbar}{\pi a k_x^2} \sin^2\left(\frac{a k_x}{2\hbar}\right) \delta k_x,$$

или

$$R_{03}(x) \delta x \simeq \frac{f\lambda}{2\pi^2 x^2 a} \sin^2\left(\frac{x\pi a}{f\lambda}\right) \delta x.$$

Для событий, когда шелкнул детектор D_4 , вычисления и результаты аналогичны.

Данные результаты вычислений вполне соответствуют экспериментальным результатам, приведенным в статье [74]. Однако выводы из этих результатов следуют совершенно другие. Результаты работы детекторов D_1 , D_2 , D_3 и D_4 в каждом конкретном элементарном событии никак не влияют на работу детектора D_0 . Они влияют на статистическую обработку этих результатов, когда от элементарных событий мы переходим к случайным. Последние самым существенным образом зависят от того, какие элементарные события мы включаем в интересующее нас случайное событие.

Вероятность случайного события может быть никак не связана с локализацией отдельных элементарных событий. Таким образом, результаты работы группы Кима ни в коей мере не противоречат эйнштейновскому принципу причинности.

22. ЗАПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ, КВАНТОВАЯ ТЕЛЕПОРТАЦИЯ

При обсуждении проблем локальности наиболее интересными и загадочными представляются так называемые запутанные состояния. Термин в свое время был введен Шредингером [76] и в оригинале выглядел как «Verschränkung». Более точным был бы перевод «переплетенные состояния», но в русскоязычной литературе укоренился термин запутанные состояния, хотя он звучит несколько двусмысленно. Для системы, состоящей из двух частиц, каждая из которых может находиться в двух

ортогональных между собой квантовых состояниях $|+\rangle$ и $|-\rangle$, примером типичных запутанных состояний являются

$$\begin{aligned}
 |\Psi^{(-)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2], \\
 |\Psi^{(+)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2], \\
 |\Phi^{(-)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1|+\rangle_2 - |-\rangle_1|-\rangle_2], \\
 |\Phi^{(+)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1|+\rangle_2 + |-\rangle_1|-\rangle_2].
 \end{aligned} \tag{73}$$

Здесь $|\cdot\rangle_{12}$ изображают векторы состояния в гильбертовом пространстве двухчастичной системы, а $|\cdot\rangle_1$ и $|\cdot\rangle_2$ — векторы состояния 1-й и 2-й частиц в гильбертовом пространстве одночастичных систем, $|\cdot\rangle_1|\cdot\rangle_2$ — прямое произведение соответствующих векторов. Квантовые состояния, изображенные в формулах (73), часто называют состояниями Белла.

Отличительной особенностью запутанных состояний является то, что с помощью классических приборов можно приготовить соответствующие чистые состояния многочастичной (в случае формул (73) двухчастичной) системы. Однако и после этого нельзя сказать, в каком чистом квантовом состоянии находится каждая из частиц, составляющих систему. С другой стороны, если в дальнейшем произвести измерение над одной частицей, то можно установить не только чистое состояние этой частицы, но и чистое квантовое состояние ее партнера, который измерению не подвергался.

Например, если известно, что двухчастичная система находится в квантовом состоянии $|\Psi^{(-)}\rangle_{12}$, то в каком из двух возможных состояний $|+\rangle$ или $|-\rangle$ находится каждая из частиц, ничего сказать нельзя. Однако если в результате последующего измерения над 1-й частицей будет установлено, что она находится в состоянии $|+\rangle_1$, то с вероятностью единица можно предсказать, что при измерении над 2-й частицей мы ее обнаружим в состоянии $|-\rangle_2$.

Такое положение вещей в стандартном подходе к квантовой механике закреплено в виде так называемого проекционного принципа [1]. Согласно этому принципу измерение, проведенное над частью исследуемой физической системы, приводит к изменению (редукции) квантового состояния всей системы. При этом могут меняться характеристики не только той части системы, которая подверглась воздействию измерительного прибора, но и другой части, которая такому воздействию не подвергалась. Так, в рассмотренном выше случае в результате измерения характеристик 1-й частицы состояние $|\Psi^{(-)}\rangle_{12}$ редуцируется (коллапсирует) в состояние $|+\rangle_1|-\rangle_2$.

В качестве рецепта математического описания воздействия измерительного прибора на квантовый объект проекционный принцип, как правило, работает очень хорошо. Но дать этому принципу сколько-нибудь наглядное физическое толкование, согласующееся с теорией относительности, в стандартном подходе не удается.

В своей знаменитой книге [1] фон Нейман вводит представление о двух типах воздействия на физическую систему. В результате воздействия, которое фон Нейман отнес ко второму типу, квантовое состояние меняется согласно уравнению Шредингера. Это изменение подчиняется принципу причинности и однозначно предсказуемо. Так происходит изменение квантового состояния системы при ее взаимодействии с другой квантовой системой или внешним классическим полем.

К первому типу фон Нейман отнес воздействие на физическую систему измерительного прибора. При таком воздействии квантовое состояние меняется случайным образом и, по мнению фон Неймана, является беспричинным. Выглядит это очень странно, так как любой измерительный прибор может рассматриваться либо как некоторая квантовая система, либо как внешнее классическое поле. Единственной отличительной особенностью взаимодействия измерительного прибора с исследуемой физической системой является то, что в результате этого взаимодействия мы получаем некоторую информацию о системе. В связи с этим фон Нейман ввел понятие психофизического параллелизма. Согласно этому принципу в описании воздействия первого типа принципиальную роль играет внутреннее Я исследователя. Этим фон Нейман пытался объяснить необычные свойства воздействия этого типа.

В отличие от других рассуждений фон Неймана, это рассуждение не представляется сколько-нибудь убедительным. В последующем предпринимались многочисленные попытки обосновать проекционный принцип, но все они, мягко говоря, с физической точки зрения представляются спорными.

Далее мы не будем проводить общее обсуждение проекционного принципа (по этому поводу см. [10]), а сосредоточим свое внимание на проблемах, возникающих при применении этого принципа в одном конкретном случае. Именно, в так называемой квантовой телепортации.

Так как состояние $\Psi_{12}^{(-)}$ обычно используется при обсуждении парадокса Эйнштейна–Подольского–Розена, то в современной литературе это квантовое состояние часто называют ЭПР-состоянием, а соответствующую двухчастичную систему ЭПР-парой.

Представление о нелокальном характере квантовых измерений породило большие надежды на возможность принципиально нового способа передачи информации (см., например, [78]). В научной литературе этот способ получил название «квантовая телепортация». Уже проведены многочисленные эксперименты, которые, вроде бы, подтверждают эти надежды. При этом элемент таинственности, присущий понятию «теле-

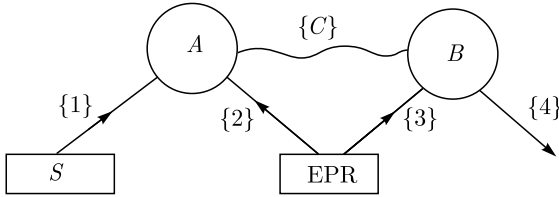


Рис. 10. Схема квантовой телепортации

портация», сохраняется и в научной литературе. Далее мы попытаемся снять этот покров таинственности. По этому поводу смотрите также [20].

Суть явления телепортации можно понять, рассматривая мысленный эксперимент, схема которого изображена на рис. 10.

Здесь S — источник начального состояния; EPR — источник ЭПР-пар; A — анализатор состояний Белла (Алиса); B — унитарный преобразователь (Боб); $\{C\}$ — канал классической связи; $\{1\}$ — носитель начального телепортируемого состояния; $\{2\}$, $\{3\}$ — ЭПР-пара; $\{4\}$ — носитель конечного телепортируемого состояния.

В стандартном виде описание явления телепортации выглядит следующим образом (см., например, [80]). Источник S испускает частицу $\{1\}$ в квантовом состоянии Ψ_1 , которому соответствует вектор гильбертова пространства $|\Psi\rangle_1 = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$, где α и β — комплексные числа, удовлетворяющие условию $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Частица $\{1\}$ направляется к Алисе. Источник EPR испускает ЭПР-пару $\{2\}$ и $\{3\}$ в состоянии $\Psi_{23}^{(-)}$ (вектор $|\Psi^{(-)}\rangle_{23}$, см. формулу (73)). Одна из частиц ($\{2\}$) пары направляется к Алисе, другая частица ($\{3\}$) направляется к Бобу.

По стандартным правилам квантовой механики состояние трехчастичной системы (частицы $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$) описывается вектором квантового состояния $|\Psi\rangle_{123} = |\Psi\rangle_1 \Psi_{23}^{(-)}$. Этот вектор может быть представлен в виде разложения по состояниям Белла частиц $\{1\}$ и $\{2\}$ (см. формулу (73))

$$|\Psi\rangle_{123} = \frac{1}{2} \left\{ |\Psi^{(-)}\rangle_{12} \left(-\alpha|+\rangle_3 - \beta|-\rangle_3 \right) + |\Psi^{(+)}\rangle_{12} \left(-\alpha|+\rangle_3 + \beta|-\rangle_3 \right) + |\Phi^{(-)}\rangle_{12} \left(\alpha|-\rangle_3 + \beta|+\rangle_3 \right) + |\Phi^{(+)}\rangle_{12} \left(\alpha|-\rangle_3 - \beta|+\rangle_3 \right) \right\}. \quad (74)$$

Алиса, используя анализатор A , определяет, в каком из четырех возможных состояний Белла находятся попавшие к ней частицы $\{1\}$ и $\{2\}$. Пусть, например, в состоянии $|\Psi^{(-)}\rangle_{12}$. После такого измерения согласно проекционному принципу стандартной квантовой механики трехчастичное состояние редуцируется следующим образом

$$|\Psi\rangle_{123} \rightarrow |\Psi^{(-)}\rangle_{12} \left(-\alpha|+\rangle_3 - \beta|-\rangle_3 \right). \quad (75)$$

По классическому каналу связи Алиса сообщает результат своего наблюдения Бобу. Получив сообщение, что Алиса зарегистрировала состояние $|\Psi^{(-)}\rangle_{12}$, Боб, ничего не делая, пропускает частицу $\{3\}$ далее. Эта частица согласно правой части формулы (96) будет находиться в состоянии $|\Psi\rangle_4 = (-\alpha|+\rangle_3 - \beta|-\rangle_3)$.

Квантовые состояния, описываемые векторами $|\Psi\rangle_1$ и $|\Psi\rangle_4$, совпадают. Первоначально между квантовыми состояниями частиц $\{1\}$ и $\{3\}$ не было никакой корреляции. Алиса манипулировала только частицами $\{1\}$ и $\{2\}$. В момент этих манипуляций частица $\{3\}$ могла находиться в области пространства \mathcal{M} , пространственноподобной области манипуляций Алисы. Тем не менее частица $\{3\}$ каким-то таинственным образом оказалась в квантовом состоянии, в котором находилась частица $\{1\}$. При этом ни Алиса, ни Боб могли не знать, в каком квантовом состоянии находилась частица $\{1\}$.

Если Алиса для $\{1\}$ и $\{2\}$ получит другой результат и по классическому каналу связи сообщит его Бобу, то Бобу придется немного поработать. Если результат будет $|\Psi^{(+)}\rangle_{12}$, то Бобу следует над частицей $\{3\}$ провести унитарную операцию, которая сводится к преобразованию $-|+\rangle \rightarrow |+\rangle$. Если результат будет $|\Phi^{(-)}\rangle_{12}$, то необходимо преобразование $|+\rangle \leftrightarrow |-\rangle$. Если результат $|\Phi^{(+)}\rangle_{12}$, то преобразование $-|+\rangle \rightarrow |+\rangle \leftrightarrow |-\rangle$. После таких операций частица $\{3\}$ окажется в состоянии $|\Psi\rangle_4$, совпадающем с квантовым состоянием $|\Psi\rangle_1$. В этих случаях из-за наличия дополнительных операций парадоксальность ситуации оказывается завуалированной. Однако с обычной точки зрения она выглядит такой же абсурдной, как и в первом случае.

Стандартные слова, которые в такой ситуации произносятся, звучат примерно так: «Многое, что абсурдно с обычной точки зрения, является нормой в квантовом мире». Однако можно обойтись без такого слабого утешения.

Для большей наглядности будем считать, что рассматриваемая двухчастичная система состоит из двух частиц, у каждой из которых спин равен $1/2$. В таком случае $|+\rangle_1$ означает квантовое состояние первой частицы с проекцией спина на выделенную ось (ось z), равной $+1/2$, а $|-\rangle_1$ — с проекцией, равной $-1/2$. Аналогично для второй частицы.

Тогда при использовании понятия элементарного состояния тот факт, что источник S испускает частицы в определенном квантовом состоянии, означает следующее. Источник испускает пучок частиц, элементарные состояния которых различны, но все они принадлежат одному определенному классу эквивалентности. Пучок не обязан быть локализованным ни во времени, ни в пространстве. Класс эквивалентности может быть никому не известен. Последнее означает, что числа α и β , фигурирующие в разложении $|\Psi\rangle_1$ по базису $|+\rangle$, $|-\rangle$, могут быть не известны, но для всех частиц пучка они одни и те же (с точностью до общего фазового множителя). Поэтому существует такая система координат в

трехмерном пространстве, в которой все частицы пучка будут иметь проекцию спина на ось z , равную $+1/2$. В этой системе координат вектору состояния $\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ соответствует $S_z = +1/2$, вектору $-\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ соответствует $S_z = -1/2$. Ось x можно направить так, чтобы вектору $\alpha|-\rangle + \beta|+\rangle$ соответствовало $S_x = +1/2$, а вектору $\alpha|-\rangle - \beta|+\rangle$ соответствовало $S_x = -1/2$.

Каждая частица пучка, испущенная источником S , анализируется Алисой совместно с частицей ЭПР-пары, испущенной источником EPR. Разные ЭПР-пары находятся в различных элементарных состояниях, но в каждой паре элементарное состояние одной частицы является негативной копией элементарного состояния другой частицы. Физическую систему, состоящую из анализатора и частицы {1}, можно рассматривать как сложный измерительный прибор. С помощью этого прибора Алиса сортирует частицы {2} по четырем группам. В каждую группу попадают частицы {2}, которые совместно с частицей {1} находятся в двухчастичном элементарном состоянии, принадлежащем одному из четырех квантовых состояний Белла.

Так как каждая из частиц {2} имеет партнера по ЭПР-паре, то эту сортировку можно рассматривать как разделения пучка частиц {3} на четыре подпучка. Согласно формуле (95) в каждый такой подпучок попадут частицы {3}, имеющие определенное значение проекции спина либо на ось z , либо на ось x . Это происходит потому, что элементарное состояние каждой частицы {3} жестко скоррелировано с элементарным состоянием частицы-партнера {2}.

Поскольку Алиса определяет, в какую группу попала каждая из частиц {2}, то она получает информацию, в какую группу попала соответствующая частица {3}. Эту информацию Алиса по классическому каналу связи сообщает Бобу. Ему этой информации достаточно, чтобы выбрать нужное унитарное преобразование. С помощью этого преобразования он так изменяет элементарное состояние частицы {3}, что оно оказывается в квантовом состоянии Ψ_1 .

Своим измерением Алиса никак не повлияла на элементарное состояние частицы {3}, она только с помощью косвенного измерения получила некоторую информацию об этом элементарном состоянии, которой поделилась с Бобом. После этого Боб произвел некоторые манипуляции с частицей {3}. В результате этих манипуляций элементарное состояние частицы {3} не стало точной копией элементарного состояния частицы {1}. Поэтому термин «телепортация» в данном случае не представляется особенно удачным. Бобу удалось только загнать частицу {3} в тот же класс эквивалентности, в котором находилась частица {1}.

Реальный эксперимент, в котором наблюдалась квантовая телепортация (см. [81]), проводился с фотонами. Обсуждение этого эксперимента, использующее понятие элементарного состояния, можно найти в [20].

23. КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ КУБИТА

В последнее время интенсивно развивается новое научное направление, лежащее на стыке квантовой физики и теории информации — физика квантовой информации (см., например, [78]).

В классической теории информации в качестве элементарной единицы принят бит. Это информация, имеющаяся в любой классической системе, которая может находиться в двух взаимоисключающих состояниях: да — нет, 0 — 1, включен — выключен и т. п.

Элементарная единица в квантовой теории информации называется кубит. Считается, что носителем кубита является квантовая система, имеющая наблюдаемую, которая может принимать два значения. Например, частица со спином $1/2$ может находиться в состояниях, в которых проекция спина на выделенную ось равна либо $+1/2$, либо $-1/2$. Фотон может иметь спиральность, равную либо $+1$, либо -1 и т. п.

Одновременно с этим считается, что, в отличие от классической системы, квантовая система может находиться в суперпозиции этих состояний. Поэтому кубит потенциально может содержать гораздо больший объем информации, чем бит. Именно с этим свойством квантовых систем связывают очень большие надежды на их практическое использование в области хранения, обработки и передачи информации.

С точки зрения теории информации физическая реализация носителя информации совершенно не существенна. Поэтому в дальнейшем терминами бит и кубит мы будем называть не только единицы информации, но и носители соответствующей информации. Потенциально кубит, вроде бы, имеет большие преимущества перед битом. Однако на современном уровне развития техники практически с кубитами очень трудно работать. В частности, очень остро стоит проблема декогеренции.

Здесь мы попытаемся заменить кубит так называемым мягким кубитом (софт-кубитом), или более коротко скубитом. С одной стороны, скубит должен нести ту же наблюдаемую информацию, что и «железный» кубит, а с другой стороны, скубит должен допускать реализацию в виде компьютерной программы. В отличие от состояния «железного» кубита, компьютерная программа может храниться практически бесконечно долго и может передаваться практически без искажения на любые расстояния.

Технически работать со скубитом несравненно проще, чем с кубитом. Поэтому скубит гораздо более удобный объект для проведения экспериментов. Конечно, имеется опасность, что в скубите мы воспроизвели не все наблюдаемые свойства кубита. Поэтому окончательное слово остается за экспериментами с кубитами. Однако эксперименты со скубитами могут быть очень хорошими эскизами для экспериментов с кубитами. Кроме того, такие эксперименты могут поставить под сомнение многие стереотипы, которые в большом количестве сложились в квантовой физике.

24. ОДИНОЧНЫЙ СКУБИТ

В физике квантовой информацией считается, что состояние (чистое) кубита описывается вектором одночастичного гильбертова пространства. Однако с результатами эксперимента этот вектор связан очень опосредованным образом. Именно считается, что математическое ожидание определенного самосопряженного линейного оператора на этом векторе равняется полученному в серии экспериментов среднему значению соответствующей наблюдаемой.

Из экспериментальных данных это среднее значение вычисляется по законам стандартной классической теории вероятностей. Это значит, что в рамках колмогоровского подхода каждый результат единичного эксперимента соответствует элементарному событию. Однако считается, что в квантовой физике колмогоровская теория вероятностей не применима. Действительно, стандартный математический аппарат квантовой механики не содержит ингредиента, который обладает свойствами элементарного события. С другой стороны, элементарное событие — это базовое понятие колмогоровской теории вероятностей.

В предыдущих разделах был развит новый подход к квантовой механике, в котором было введено новое понятие «элементарное состояние». С одной стороны, это состояние связано с более полным описанием квантовой системы, чем квантовое состояние. С другой стороны, оно обладает свойствами элементарного события колмогоровской теории вероятностей.

Соответственно, мы будем считать, что одиночный скубит следует характеризовать не квантовым состоянием, а более детально, элементарным состоянием. Это позволит работать со скубитами, используя колмогоровскую теорию вероятностей.

Так же как обычный кубит, скубит может быть реализован различными способами. Мы воспользуемся способом, предложенным в статье [11]. В этом варианте скубит имеет вид многослойной раскрашенной сферы единичного радиуса. Слои раскрашены следующим образом: положительный полюс — черный (+1), отрицательный полюс — белый (-1). Промежуточные области имеют серую окраску, насыщенность которой черным цветом меняется по закону

$$\rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = (\mathbf{r}\mathbf{R}),$$

где \mathbf{r} — единичный радиус-вектор, проведенный в текущую серую точку, а \mathbf{R} — единичный радиус-вектор, проведенный в положительный полюс. Разные слои могут иметь разную ориентацию. Кроме того, с каждым слоем, имеющим номер k , связана функция $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$, которая для всех \mathbf{r} , во-первых, удовлетворяет условиям

$$-1/2 < \varepsilon^{(k)}(\mathbf{r}) < +1/2, \quad \varepsilon^{(k)}(-\mathbf{r}) = -\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r}), \quad (76)$$

во-вторых, одному из условий

$$|\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} + \varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})| > 1/2, \quad (77)$$

или

$$|\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} + \varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})| \leq 1/2. \quad (78)$$

Слой, для которого выполняется условие (77), назовем активным, а для которого выполняется условие (78) — пассивным.

При взгляде на функцию $\rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$ сразу же возникает ассоциация с функцией распределения среднего значения проекции спина на направление \mathbf{r} для частицы со спином $1/2$, находящейся в фиксированном квантовом состоянии. Это вполне естественно. Если мы хотим, чтобы скубит моделировал свойства кубита, то эти свойства каким-то образом следует заложить в определение скубита. Крайне желательно чтобы это определение (в частности функция $\rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$) было единым для всех процессов, которые мы собираемся описывать с помощью скубитов. В противном случае мы будем иметь дело не с моделированием кубита, а с моделированием отдельного квантового процесса, что представляется гораздо менее интересной задачей.

Далее для скубита используется терминология, которая применяется для кубита, реализуемого в виде квантовой частицы со спином $1/2$. Элементарное состояние скубита фиксируется однозначно, если заданы $\mathbf{R}^{(k)}$ и $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ для всех k и \mathbf{r} . Для этого требуется бесконечный объем информации. Поэтому может показаться, что само понятие элементарного состояния в достаточной мере бесполезно. В действительности это не так из-за специфического характера квантовых измерений. Как мы увидим далее, в большинстве случаев для получения численного значения исследуемой наблюдаемой достаточно знать характеристики небольшого числа внешних слоев. Кроме того, так как в каждом отдельном измерении можно измерить проекцию спина $S(\mathbf{r})$ только на одно направление \mathbf{r} , то для фиксирования результата измерения достаточно зафиксировать значения функций $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ только для этого направления \mathbf{r} .

Статистический характер измерений легко наглядно представить, предположив наличие некоего «хозяина элементарного события», который олицетворяет все неконтролируемые воздействия на исследуемый объект. Этот хозяин выбирает из всех допустимых элементарных событий одно конкретное. В случае скубита он выбирает $\mathbf{R}^{(k)}$ и $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$, удерживая \mathbf{r} фиксированным. В компьютерной реализации скубита в качестве такого хозяина может выступать генератор случайных чисел.

Будем считать, что прибор, измеряющий проекцию спина $S(\mathbf{r})$, реагирует только на активный слой. Если $\mathbf{R}^{(k')}\mathbf{r} > 0$, то $S(\mathbf{r}) = +1/2$, если $\mathbf{R}^{(k')}\mathbf{r} < 0$, то $S(\mathbf{r}) = -1/2$. Таким образом, результат конкретного измерения зависит от одного контролируемого параметра \mathbf{r} (контролируется измерительным прибором) и двух неконтролируемых параметров: номера

активного слоя (k') и полюса активного слоя $\mathbf{R}^{(k')}$. Эти два параметра определяются параметрами $\mathbf{R}^{(k)}$ и $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$, которые выбираются хозяином.

В колмогоровской теории вероятностей элементарному событию (в нашем случае элементарному состоянию), в общем случае, нельзя приписать никакой вероятностной меры. Такие меры можно приписать только некоторым подмножествам множества элементарных событий. Эти подмножества должны образовывать σ -алгебру (см. разд. 4). Отличительной особенностью квантовых систем является то, что для них нельзя построить общую σ -алгебру, которая позволяла бы описывать вероятности событий, содержащих определенные значения несовместимых наблюдаемых (см. [20, 9]). Для каждой группы совместимых наблюдаемых следует строить свою σ -алгебру. Для кубитов в качестве образующих таких σ -алгебр можно взять (см. [11]) множества элементарных состояний, для которых $\mathbf{R}^{(k)}$ лежат внутри малых телесных углов $d\mathbf{R}^{(k)}$, а $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ внутри малых интервалов $d\varepsilon$. Для каждого значения \mathbf{r} следует построить свою σ -алгебру и, соответственно, свои вероятностные меры. В многочисленных «доказательствах» утверждения, что в рамках колмогоровской теории вероятностей нельзя воспроизвести квантовые распределения, регулярно забывают, во-первых, о необходимости зафиксировать σ -алгебру, а во-вторых, что ее нельзя зафиксировать для несовместимых наблюдаемых. Например, в доказательствах различных вариантов неравенств Белла даже нет упоминания о σ -алгебре, хотя σ -алгебра является базовым понятием колмогоровской теории вероятностей.

Теперь опишем воздействие на кубит прибора, который является аналогом прибора, называющегося в оптике поляризационным светоделителем PBS. В оптике этот прибор разделяет неполяризованный луч света на два луча, поляризованных в двух ортогональных направлениях. В нашем случае будем считать, что геометрия прибора выделяет некоторое направление \mathbf{n} (единичный вектор) и разделяет ансамбль кубитов на два подансамбля $\Psi_{\mathbf{n}}^+$ и $\Psi_{\mathbf{n}}^-$. Для каждого отдельного кубита результат измерения определяется действиями хозяина элементарного события (генератора случайных чисел). Хозяин генерирует значения $\mathbf{R}^{(1)}$ и $\varepsilon^{(1)}(\mathbf{n})$ для первого слоя кубита. Если $\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{n} + \varepsilon^{(1)}(\mathbf{n}) > 1/2$, то PBS регистрирует значение $S(\mathbf{n}) = +1/2$ и направляет кубит в подансамбль $\Psi_{\mathbf{n}}^+$. Если $\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{n} + \varepsilon^{(1)}(\mathbf{n}) < -1/2$, то PBS регистрирует значение $S(\mathbf{n}) = -1/2$ и направляет кубит в подансамбль $\Psi_{\mathbf{n}}^-$. Если $|\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{n} + \varepsilon^{(1)}(\mathbf{n})| \leq 1/2$, то PBS не регистрирует никакого значения, а делает вторую попытку, переходя на второй слой и повторяя всю процедуру. С физической точки зрения хозяин должен сначала сгенерировать большое количество слоев, а только затем следовало бы проверять эти слои на активность. Однако, с точки зрения компьютера, такая последовательность сопряжена с бесполезной тратой ресурсов. Обратим внимание на то, что параметры второго слоя $\mathbf{R}^{(2)}$ и $\varepsilon^{(2)}(\mathbf{n})$ не зависят от значений параметров первого

слоя. Процесс продолжается до тех пор, пока для исследуемого скубита не будет зарегистрировано определенное значение $S(\mathbf{n})$. Теоретически для этого может понадобиться бесконечное число попыток. Но практически вероятность события с большим количеством шагов оказывается чрезвычайно мала.

На первый взгляд кажется, что подансамбли $\Psi_{\mathbf{n}}^+$ и $\Psi_{\mathbf{n}}^-$ соответствуют квантовым состояниям с определенными значениями $S(\mathbf{n}) = +1/2$ и $S(\mathbf{n}) = -1/2$ соответственно. Однако дело обстоит сложнее. Дело в том, что, действительно, для каждого из подансамблей зарегистрировано определенное значение $S(\mathbf{n})$, но этого мало. Для квантового состояния характерно вполне определенное распределение вероятностей для значений проекций спина на другие направления \mathbf{r} .

Кроме того, в результате взаимодействия кубита (скубита) с измерительным прибором его элементарное состояние может измениться. Здесь возможны три варианта. Во-первых, элементарное состояние может измениться неконтролируемым образом. В этом случае говорить о каком-то квантовом состоянии не приходится. Во-вторых, элементарное состояние может не измениться. Это происходит в так называемых косвенных измерениях, в которых измерение происходит без физического контакта измеряемой частицы с измерительным прибором. Это возможно, если заранее известно, что элементарные состояния двух удаленных друг от друга частиц скоррелированы. Тогда, измеряя характеристики одной из частиц, мы получаем сведения о характеристиках другой. В этом случае ответ на вопрос о квантовом состоянии зависит от характеристик ансамбля до измерения.

Наконец, возможен третий вариант, когда измерительный прибор приготавливает квантовое состояние. Это происходит в том случае, когда прибор меняет элементарное состояние вполне определенным образом, в нашем случае — когда после измерения $\mathbf{R}^{(k)}$ ($k = k'$) случайным образом распределены по верхней полусфере $\mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^+$ с центральным вектором \mathbf{n} , а для пассивных слоев $\mathbf{R}^{(k)}$ ($k \neq k'$) распределены по всей сфере \mathfrak{R} . Функции $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ для всех k случайно распределены по интервалу $(-1/2, +1/2)$. Для $S(\mathbf{n}) = -1/2$ вектор $\mathbf{R}^{(k')}$ должен быть случайно распределен по полусфере $\mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^-$ с центральным вектором $-\mathbf{n}$.

Рассмотрим событие (подмножество элементарных состояний), в котором \mathbf{r} и $d\varepsilon$ фиксированы, $\mathbf{R}^{(k')} \in \mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^+$, $\mathbf{R}^{(k)} \in \mathfrak{R}$ ($k \neq k'$), $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r}) \in d\varepsilon$ или $-\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r}) \in d\varepsilon$.

Начнем с первого слоя, т. е. положим $k = 1$. Вероятность реализации неравенства (77) с дополнительным условием $\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} > 0$ ($j = +1$) или с дополнительным условием $\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} < 0$ ($j = -1$) описывается выражением

$$P_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{r}, \varepsilon, j) d\varepsilon = d\varepsilon \frac{N}{2} \int d\mathbf{R} \widehat{T}(\mathbf{R}\mathbf{n}) \left[\widehat{T}[j(\mathbf{R}\mathbf{r} + \varepsilon) - 1/2] + \widehat{T}[j(\mathbf{R}\mathbf{r} - \varepsilon) - 1/2] \right]. \quad (79)$$

Здесь N — нормировочный множитель, $d\mathbf{R} = d\varphi d\vartheta \sin \vartheta$, $\widehat{T}(x)$ — пороговая функция Хевисайда. Из (79) следует

$$P_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{r}, \varepsilon) \equiv \sum_{j=\pm 1} P_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{r}, \varepsilon, j) = N\pi. \quad (80)$$

Вероятность реализации неравенства (78) описывается выражением

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{r}, \varepsilon) d\varepsilon = d\varepsilon \frac{N}{2} \int d\mathbf{R} \left[\widehat{T}[1/2 + \mathbf{Rr} + \varepsilon] \widehat{T}[1/2 - \mathbf{Rr} - \varepsilon] + \right. \\ \left. + \widehat{T}[1/2 + \mathbf{Rr} - \varepsilon] \widehat{T}[1/2 - \mathbf{Rr} + \varepsilon] \right] = 2N\pi d\varepsilon. \end{aligned} \quad (81)$$

Из формул (80) и (81) получаем $N = (3\pi)^{-1}$ и

$$\widetilde{P}_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = 2/3. \quad (82)$$

Для второго слоя ($k = 2$) можно повторить те же рассуждения. Надо только учесть, что благодаря формуле (82) со вторым слоем нам придется иметь дело с вероятностью $2/3$. Продолжая этот процесс, мы получим, что при фиксированных \mathbf{r} , $d\varepsilon$ и j вероятность активному слою иметь номер k' с дополнительным условием $j\mathbf{R}^{(k')}\mathbf{r} > 0$ равна

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{n}}^{(k')}(\mathbf{r}, \varepsilon, j) = \\ = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{k'} \int d\mathbf{R} \widehat{T}(j\mathbf{Rn}) \left[\widehat{T}[\mathbf{Rr} + \varepsilon - 1/2] + \widehat{T}[\mathbf{Rr} - \varepsilon - 1/2] \right], \end{aligned} \quad (83)$$

а вероятность обнаружить у активного слоя номер больше k равна

$$\widetilde{P}_{\mathbf{n}}^{(k)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = \left(\frac{2}{3}\right)^k. \quad (84)$$

Эта вероятность быстро убывает с ростом k . Поэтому для получения окончательного результата практически придется сгенерировать характеристики лишь небольшого числа слоев.

Из равенства (83) получаем

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, j) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} d\varepsilon P_{\mathbf{n}}^{(k)}(\mathbf{r}, \varepsilon, j) = \frac{1}{\pi} \int d\mathbf{R} \widehat{T}[j\mathbf{Rn}] (\mathbf{Rr}) \widehat{T}[\mathbf{Rr}]. \quad (85)$$

Так как

$$\sum_j P_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, j) = 1, \quad \sum_j j P_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, j) = (\mathbf{rn}), \quad (86)$$

то

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, j) = \frac{1}{2} \left(1 + j(\mathbf{rn}) \right). \quad (87)$$

Эта формула правильно описывает распределение значений проекций спина на направление \mathbf{r} в квантовом состоянии, в котором $S(\mathbf{n}) = +1/2$. Тот же окончательный результат получается в том случае, когда в подансамбль $\Psi_{\mathbf{n}}^+$ включаются скубиты, у которых для всех слоев $\mathbf{R}^{(k)} \in \mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^+$. Это означает, что такая выборка является вполне репрезентативной для квантового состояния с $S(\mathbf{n}) = +1/2$. Отметим, что квантовое состояние возникает *после момента измерения*.

Из (87) получается, что среднее значение проекции спина на направление \mathbf{r} задается формулой

$$\langle S(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\mathbf{n}). \tag{88}$$

Принципиальная схема компьютерной программы, которая позволяет прийти к результату (88), выглядит следующим образом.

1. Фиксируется два единичных вектора \mathbf{n} и \mathbf{r} .
 2. Генератор случайных чисел генерирует единичный вектор $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^+$ и $\varepsilon(\mathbf{r}) \in (-1/2, +1/2)$.
 3. Вычисляется $|\mathbf{R}\mathbf{r} + \varepsilon(\mathbf{r})|$.
 4. Если выполняется неравенство (77), то вычисляется $\mathbf{R}\mathbf{r}$. Если $\mathbf{R}\mathbf{r} > 0$, то число 1 добавляется в память M^+ , если $\mathbf{R}\mathbf{r} < 0$, то число 1 добавляется в память M^- .
- На этом эксперимент с данным скубитом считается завершенным.
5. Если в п. 3 выполняется неравенство (78), то программа возвращается к п. 2 и т. д.
 6. После того, как цикл оборвется (или будет искусственно оборван ограничителем), программа перейдет к исследованию следующего скубита.
 7. После обработки достаточного числа скубитов вычисляется среднее значение проекции спина по формуле

$$\langle S(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{M_+ - M_-}{M_+ + M_-}.$$

Здесь символы M_{\pm} обозначают числа, скопившиеся в соответствующих разделах памяти.

В этой схеме вектор \mathbf{n} следует рассматривать не как характеристику отдельного скубита, а как характеристику подансамбля $\Psi_{\mathbf{n}}^+$ всех скубитов, для которых $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^+$, так как для отдельного скубита нельзя вычислить среднее значение $\langle S(\mathbf{r}) \rangle$. Таким образом, в качестве представителя квантового состояния здесь рассматривается не вектор гильбертова пространства, а подансамбль $\Psi_{\mathbf{n}}^+$.

Фактическая реализация этой программы описана в статье [82].

На первый взгляд кажется, что подансамбль $\Psi_{\mathbf{n}}^+$ не имеет ничего общего с вектором гильбертова пространства, с помощью которого описывается квантовое состояние в стандартном математическом аппарате квантовой механики. Однако каноническая конструкция Гельфанда–Най-

марка–Сигала (ГНС) дает такую связь. В том случае, когда наблюдаемые являются элементами C^* -алгебры и на этой алгебре задан линейный положительный нормированный функционал, конструкция ГНС позволяет построить гильбертово пространство (см., например, [13, 16]), в котором наблюдаемым однозначно соответствуют самосопряженные операторы, а линейные функционалы представляются в виде математических ожиданий операторов на векторах этого пространства.

В нашем случае эти линейные функционалы задаются формулой (88). В правой части вектор \mathbf{n} отличает один функционал от другого, а вектор \mathbf{r} является аргументом такого функционала. Так как по построению функционалы (88) имеют смысл средних значений наблюдаемых по соответствующим подансамблям скубитов, то отпадает необходимость в аксиоме Борна. В стандартном математическом аппарате квантовой механики первичным понятием является гильбертово пространство, а средние значения наблюдаемых вторичны. В нашей схеме первичными являются значения наблюдаемых, а гильбертово пространство через конструкцию ГНС — вторичный элемент. В то время как значения наблюдаемых имеют наглядный физический смысл, ни гильбертово пространство, ни правило Борна наглядного физического смысла не имеют.

Обратим внимание на то, что при вычислении среднего значения $\langle S(\mathbf{r}) \rangle$ мы проверяли неравенства (77) и (78), в которых фигурирует вектор \mathbf{r} . Это означает, что для одного и того же множества векторов \mathbf{R} ($\mathbf{R} \in \mathfrak{R}_n^+$) схемы вычисления средних значений для разных $S(\mathbf{r})$ будут разными. В терминах теории вероятностей это означает, что множество элементарных событий одно и то же, а вероятностные меры разные. Напомним, что в колмогоровской теории вероятностные меры зависят не только от множества элементарных событий, но и от σ -алгебры, которой оснащено это множество. В нашем случае наблюдаемые, описывающие проекции спина на разные направления \mathbf{r} , несовместимы, и для таких наблюдаемых нельзя построить общую σ -алгебру.

25. СИНГЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХ СКУБИТОВ

Характерным свойством синглетного состояния двух частиц является то, что при измерении проекций спина первой и второй частиц $S_1(\mathbf{n})$ и $S_2(\mathbf{n})$ на любое направление \mathbf{n} всегда выполняется равенство

$$S_1(\mathbf{n}) + S_2(\mathbf{n}) \equiv S(\mathbf{n}) = 0. \quad (89)$$

В рассматриваемом подходе равенство (89) предполагает жесткую корреляцию между элементарными состояниями скубитов 1 и 2. Эту корреляцию можно реализовать, потребовав выполнения равенств

$$\mathbf{R}_1^{(k)} + \mathbf{R}_2^{(k)} = 0, \quad \varepsilon_1^{(k)}(\mathbf{r}) = \varepsilon_2^{(k)}(-\mathbf{r}). \quad (90)$$

Здесь $\mathbf{R}_1^{(k)}$ и $\mathbf{R}_2^{(k)}$ — векторы ориентации k -го слоя для первого и второго скубита; $\varepsilon_i^{(k)}(\mathbf{r})$ ($i = 1, 2$) — функции $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ для этих скубитов. Из равенств (90) сразу же следует, что номера активных слоев для первого и второго скубита совпадают, и для любого направления \mathbf{n} выполняется соотношение (89) вне зависимости от расстояния между скубитами в момент измерения. Иными словами, реализуется ситуация парадокса Эйнштейна–Подольского–Розена [28]. Корреляция (89) возникает не в момент измерения проекций спина, а в момент приготовления синглетного двухскубитного состояния. Частицы с такой корреляцией часто называют ЭПР-парой.

Посмотрим, к каким корреляциям это приводит для проекций $S_1(\mathbf{r}_1)$, $S_2(\mathbf{r}_2)$ спинов скубитов на направления \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно. Так же как для односкубитной системы, элементарному состоянию двухскубитной системы нельзя приписать никакой вероятностной меры. Поэтому рассмотрим событие, в котором \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и $d\varepsilon$ фиксированы, а $\mathbf{R}_1^{(k)} \in \mathfrak{R}$, $\varepsilon_1^{(k)}(\mathbf{r}_1) \in d\varepsilon$ или $-\varepsilon_1^{(k)}(\mathbf{r}_1) \in d\varepsilon$. Введем также два параметра j_1 и j_2 : $j_1 = +1$, если $\mathbf{R}_1^{k'} \mathbf{r}_1 > 0$; $j_1 = -1$, если $\mathbf{R}_1^{k'} \mathbf{r}_1 < 0$; $j_2 = +1$, если $\mathbf{R}_2^{k'} \mathbf{r}_2 > 0$; $j_2 = -1$, если $\mathbf{R}_2^{k'} \mathbf{r}_2 < 0$. У обоих скубитов номер активного слоя k' один и тот же.

Пусть фиксированы \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , $d\varepsilon$, j_1 и j_2 . Пусть $k = 1$. Тогда вероятность реализации неравенства (77) для скубита 1 описывается выражением

$$\begin{aligned} P^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon, j_1, j_2) d\varepsilon = \\ = d\varepsilon \frac{N}{2} \int d\mathbf{R} \hat{T}[-j_2 \mathbf{R} \mathbf{r}_2] \left[\hat{T} \left[j_1 (\mathbf{R} \mathbf{r}_1 + \varepsilon) - \frac{1}{2} \right] + \hat{T} \left[j_1 (\mathbf{R} \mathbf{r}_1 - \varepsilon) - \frac{1}{2} \right] \right]. \end{aligned} \quad (91)$$

Отсюда получаем

$$P^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = \sum_{j_1, j_2} P^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon, j_1, j_2) = N2\pi. \quad (92)$$

Вероятность реализации неравенства (78) описывается выражением

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) d\varepsilon = d\varepsilon \frac{N}{2} \int d\mathbf{R} \left[\hat{T} \left[\frac{1}{2} + \mathbf{R} \mathbf{r}_1 + \varepsilon \right] \hat{T} \left[\frac{1}{2} - \mathbf{R} \mathbf{r}_1 - \varepsilon \right] + \right. \\ \left. + \hat{T} \left[\frac{1}{2} + \mathbf{R} \mathbf{r}_1 - \varepsilon \right] \hat{T} \left[\frac{1}{2} - \mathbf{R} \mathbf{r}_1 + \varepsilon \right] \right] = N2\pi d\varepsilon. \end{aligned} \quad (93)$$

Из (92) и (93) получаем

$$N = (4\pi)^{-1}, \quad \tilde{P}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = 1/2.$$

Повторяя выкладки для односкубитной системы, получим, что при фиксированных \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , $d\varepsilon$, j_1 , j_2 вероятность у активного слоя иметь

номер $k = k'$ описывается формулой

$$P^{(k')}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon, j_1, j_2) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2^{k'}} \int d\mathbf{R} \widehat{T}[-j_1 j_2 \mathbf{R} \mathbf{r}_2] \left[\widehat{T} \left[\mathbf{R} \mathbf{r}_1 + \varepsilon - \frac{1}{2} \right] + \widehat{T} \left[\mathbf{R} \mathbf{r}_1 - \varepsilon - \frac{1}{2} \right] \right], \quad (94)$$

а вероятность обнаружить у активного слоя номер больше k описывается формулой

$$\widetilde{P}^{(k)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = 2^{-k}.$$

Далее, следуя процедуре, аналогичной той, которая привела к формулам (85), (86) и (87), получим

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, j_1, j_2) = \frac{1}{4} \left(1 - j_1 j_2 (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) \right). \quad (95)$$

Это выражение описывает вероятность обнаружить у первого кубита по направлению \mathbf{r}_1 проекцию спина, равную $j_1/2$, а у второго кубита по направлению \mathbf{r}_2 обнаружить проекцию спина, равную $j_2/2$.

Вероятность (95) совпадает с той, которая получается в стандартном подходе к квантовой механике. Как и следовало ожидать, формула (95) симметрична относительно кубитов 1 и 2, хотя исходная формула (91) несимметрична. Это объясняется тем, что при фиксировании вероятностной меры мы должны как-то объединить элементарные события (элементарные состояния) в события, которым можно приписать вероятностную меру. В формуле (91) это объединение произведено по признакам $\mathbf{R}_1^{(k)} \in \mathfrak{A}$, $\pm \varepsilon_1^{(k)} \in d\varepsilon$. Благодаря равенствам (90) фиксировать $\mathbf{R}_2^{(k)}$ и $\varepsilon_2^{(k)}$ уже не следует. Заметим, что каждая из функций $\varepsilon_i^{(k)}$ ($i = 1, 2$) должна удовлетворять неравенствам (76), (77), (78). Кроме того, функции $\varepsilon_i^{(k)}$ нужны только для выделения активного слоя, а их конкретные значения интереса не представляют. При объединении по признаку $\pm \varepsilon_1^{(k)} \in d\varepsilon$ мы объединяли элементарные события по признаку распределения активных слоев у кубита 1. Автоматически такое же распределение будет и у кубита 2. С другой стороны, чтобы по этому распределению восстановить распределение значений функций $\varepsilon_2^{(k)}(\mathbf{r}_2)$, следовало бы задать явный вид всех функций $\varepsilon_i^{(k)}(\mathbf{r})$, что является очень трудной задачей, при этом никакого практического интереса не представляющей.

Из формулы (95) для корреляционной функции получаем выражение

$$E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4} \sum_{j_1, j_2} j_1 j_2 P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, j_1, j_2) = -\frac{1}{4} (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2), \quad (96)$$

которое нарушает неравенство Белла.

Корреляция (96) имеет нелокальный характер, так как связывает между собой измеряемые значения проекций спинов кубитов, которые в момент измерения могут находиться на любых расстояниях. Но

эта корреляция не возникает каким-то чудодейственным образом в момент измерения. Она возникла в момент приготовления синглетного состояния.

26. КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЛЕПОРТАЦИИ

Коротко повторю основные положения стандартного описания квантовой телепортации. Это явление связывается с запутанными квантовыми состояниями. В качестве таковых чаще всего используются так называемые состояния Белла

$$\begin{aligned}
 |\Psi^{(-)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2], \\
 |\Psi^{(+)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |-\rangle_2 + |-\rangle_1 |+\rangle_2], \\
 |\Phi^{(-)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |+\rangle_2 - |-\rangle_1 |-\rangle_2], \\
 |\Phi^{(+)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |+\rangle_2 + |-\rangle_1 |-\rangle_2].
 \end{aligned}
 \tag{97}$$

Эти состояния образуют ортонормированный базис в двухчастичном гильбертовом пространстве. Строятся они из одночастичных состояний $|\pm\rangle_i$ ($i = 1, 2$). Состояние $|\Psi^{(-)}\rangle_{12}$ — синглетное, состояния $|\Psi^{(+)}\rangle_{12}$, $|\Phi^{(-)}\rangle_{12}$, $|\Phi^{(+)}\rangle_{12}$ — триплетные.

Физическая реализация этих состояний может быть разной. В теоретических рассуждениях в качестве $|\pm\rangle_i$ обычно рассматривают спиновые состояния частицы со спином $1/2$. В экспериментах обычно используют фотоны с различной поляризацией. Мы будем использовать спиновую терминологию.

На рис. 10 была изображена принципиальная схема квантовой телепортации.

S — источник начального состояния; EPR — источник ЭПР-пар; A — анализатор состояний Белла (Алиса); B — унитарный преобразователь (Боб); $\{C\}$ — канал классической связи; $\{1\}$ — носитель начального телепортируемого состояния; $\{2\}, \{3\}$ — ЭПР-пара; $\{4\}$ — носитель конечного телепортированного состояния.

Стандартное описание схемы телепортации выглядит следующим образом. Источник S испускает частицу $\{1\}$ в квантовом состоянии $|\Psi\rangle_1 = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$, где α и β — комплексные числа ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$). Частица $\{1\}$ направляется Алисе. Источник EPR испускает ЭПР-пару $\{2\}$ и $\{3\}$ в синглетном состоянии $|\Psi^{(-)}\rangle_{23}$. Одна частица ($\{2\}$) пары направляется Алисе, другая частица ($\{3\}$) направляется Бобу.

По правилам квантовой механики состояние системы из трех частиц $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ описывается вектором $|\Psi\rangle_{123} = |\Psi\rangle_1 \otimes |\Psi^{(-)}\rangle_{23}$. Этот вектор может быть разложен по состояниям Белла (97) частиц $\{1\}$ и $\{2\}$:

$$|\Psi\rangle_{123} = \frac{1}{2} \left\{ |\Psi^{(-)}\rangle_{12} \left(-\alpha|+\rangle_3 - \beta|-\rangle_3 \right) + |\Psi^{(+)}\rangle_{12} \left(-\alpha|+\rangle_3 + \beta|-\rangle_3 \right) + |\Phi^{(-)}\rangle_{12} \left(\alpha|-\rangle_3 + \beta|+\rangle_3 \right) + |\Phi^{(+)}\rangle_{12} \left(\alpha|-\rangle_3 - \beta|+\rangle_3 \right) \right\}. \quad (98)$$

Алиса определяет, в каком из четырех состояний (97) находятся частицы $\{1\}$ и $\{2\}$. Экспериментально это сравнительно легко сделать для состояния $|\Psi^{(-)}\rangle_{12}$. Поэтому другие состояния обычно просто отбрасывают. Это снижает эффективность телепортации в четыре раза, но с этим мирятся. Алиса сообщает результат своего наблюдения Бобу по каналу $\{C\}$.

Если Алиса зарегистрировала такой результат, то согласно проекционному принципу трехчастичная система коллапсирует в состояние $|\Psi'\rangle_{123} = |\Psi^{(-)}\rangle_{12}(-\alpha|+\rangle_3 - \beta|-\rangle_3)$. В этом случае частица $\{3\}$ уже находится в состоянии, совпадающем с состоянием частицы $\{1\}$ (см. (97)), и Бобу ничего делать не надо. Если Алиса зарегистрировала одно из триплетных состояний, то Бобу придется совершать некоторые унитарные преобразования состояния частицы $\{3\}$ (поменять некоторые знаки у коэффициентов α и β), чтобы получить состояние (частицы $\{4\}$), совпадающее с состоянием частицы $\{1\}$. В реальных экспериментах в качестве анализатора двухчастичных состояний частиц $\{1\}$ и $\{2\}$ обычно используется простой светоделитель BS. Он выделяет синглетное состояние, но триплетные состояния отличить друг от друга не может.

Теперь посмотрим, как это явление можно реализовать с помощью скубитов. Сначала опишем программу, которая будет исполнять роль прибора BS. Эту программу также назовем BS. Геометрия прибора BS выделяет в пространстве некоторую декартову систему координат с направляющими векторами \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} . Потребуем, чтобы прибор BS мог различать между собой синглетное и три триплетных состояния. Эти состояния можно охарактеризовать произведением проекций спинов для первой и второй частицы. Эти наблюдаемые совместимы. Комбинация $[S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) < 0, S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) < 0]$ характерна для синглетного состояния. Комбинации: $[S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) > 0, S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) > 0]$, $[S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) > 0, S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) < 0]$, $[S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) < 0, S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) > 0]$ характерны для трех триплетных состояний.

Пусть скубиты $\{1\}$ и $\{2\}$ попадают в прибор BS. Будем считать, что прибор BS реагирует на активные слои скубитов $\{1\}$, $\{2\}$ и измеряет знаки $S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x})$, $S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z})$. Таким образом, наш прибор BS различает все четыре ортогональные двухчастичные состояния. Поэтому с его помощью можно добиться стопроцентной эффективности телепортации.

Обратим внимание на то, что мы используем проекции только на две оси, а не на все три. Дело вот в чем. Рассмотрим, например, синглетное состояние. В стандартном формализме квантовой механики ему соответствуют такие комбинации значений проекций спинов: $S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) < 0$, $S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) < 0$, $S_1(\mathbf{y})S_2(\mathbf{y}) < 0$, хотя для однозначной фиксации квантового состояния достаточно первых двух условий. Для двух кубитов помимо указанного набора возможен и такой: $S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) < 0$, $S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) < 0$, $S_1(\mathbf{y})S_2(\mathbf{y}) > 0$. Этот набор не соответствует никакому квантовому состоянию двухчастичной системы. Аналогичные рассуждения справедливы и для трех вариантов, соответствующих триплетному состоянию. Таким образом, мы не можем утверждать, что рассматриваемая пара находится в каком-то одном из квантовых состояний. Мы можем только констатировать, что эта пара принадлежит одному из четырех *предквантовых* состояний. Последнее означает, что прибор, который измеряет произведения проекций спинов только на два направления, выдает результат, характерный для соответствующего квантового состояния.

С другой стороны, BS может быть не только измеряющим прибором, но может и готовить синглетное квантовое состояние. В этом случае прибор BS, получив на входе элементарное состояние кубитов с набором $S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) < 0$, $S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) < 0$, на выходе должен давать элементарное состояние кубитов с набором $S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) < 0$, $S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) < 0$, $S_1(\mathbf{y})S_2(\mathbf{y}) < 0$. Это опять-таки свидетельствует о том, что показания измерительного прибора *определяются* элементарным состоянием кубитов непосредственно *перед моментом* измерения, а *определяют* квантовое состояние *после момента* измерения. Можно ожидать, что последнее справедливо не только для кубитов, но и для кубитов.

Как отмечено в разд. 23, если для активного слоя $\mathbf{R}_1^{(k')} \in \mathfrak{R}^+(\mathbf{x})$, то $S_1(\mathbf{x}) = +1/2$. Отсюда следует, что если $x_1 \equiv \mathbf{R}_1^{(k')}\mathbf{x} > 0$, то $S_1(\mathbf{x}) = +1/2$. Аналогично для второго кубита и для проекций на \mathbf{z} . Поэтому комбинация $[x_1x_2 < 0, z_1z_2 < 0]$ характерна для синглетного состояния, а комбинации $[x_1x_2 > 0, z_1z_2 > 0]$, $[x_1x_2 > 0, z_1z_2 < 0]$, $[x_1x_2 < 0, z_1z_2 > 0]$ характерны для триплетных состояний. Таким образом, мы можем считать, что прибор BS непосредственно сортирует кубиты не по проекциям спинов, а по проекциям x, z векторов \mathbf{R} , задающих ориентацию активных слоев кубитов. Для компьютерной реализации это значительно более удобно.

Теперь вернемся к рис. 10. Источник S посылает Алисе пучок кубитов $\{1\}$, поляризованных по вектору \mathbf{n} . Пусть векторы \mathbf{R}_1 характеризуют ориентацию активных слоев кубитов $\{1\}$, а $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_1(\mathbf{n})$ — значения функций ε_1 для этих слоев. Тогда для посылаемых источником S кубитов справедливо неравенство

$$\mathbf{R}_1\mathbf{n} + \varepsilon_1 - 1/2 > 0. \quad (99)$$

Источник EPR испускает ЭПР-пары кубитов $\{2\}, \{3\}$, векторы $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_3$ характеризуют ориентации активных слоев для этих кубитов, а $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3$ — значения соответствующих функций ε для направления \mathbf{n} .

Воспроизводя условия реального эксперимента, будем считать, что прибор BS отбирает те пары кубитов $\{1\}-\{2\}$, для которых он регистрирует синглетное предквантовое состояние. В нашем случае это пары, у которых для активных слоев $x_1x_2 < 0$ и $z_1z_2 < 0$. Это эквивалентно тому, что BS отбирает пары $\{1\}-\{3\}$, у которых

$$x_1x_3 > 0, \quad z_1z_3 > 0. \quad (100)$$

Заметим, что прибор BS не контактирует со кубитами $\{3\}$. Поэтому он не изменяет их первоначальные элементарные состояния.

Для кубитов, для которых

$$\mathbf{R}_3\mathbf{n} + \varepsilon_3 > 1/2, \quad (101)$$

телепортация прошла успешно, а для кубитов, для которых

$$\mathbf{R}_3\mathbf{n} + \varepsilon_3 < -1/2, \quad (102)$$

телепортация оказалась неуспешной.

Учитывая формулы (99)–(102), получаем, что число кубитов, для которых телепортация прошла успешно, задается формулой

$$N_+ = N \int d\mathbf{R}_1 \int d\mathbf{R}_3 \int d\varepsilon_1 \int d\varepsilon_3 \hat{T} \left(\mathbf{R}_1\mathbf{n} + \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \right) \hat{T}(\mathbf{R}_1\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}_3\mathbf{x}) \times \\ \times \hat{T}(\mathbf{R}_1\mathbf{z} \cdot \mathbf{R}_3\mathbf{z}) \hat{T} \left(\mathbf{R}_3\mathbf{n} + \varepsilon_3 - \frac{1}{2} \right), \quad (103)$$

а число кубитов, для которых телепортация кончилась неудачей, задается формулой

$$N_- = N \int d\mathbf{R}_1 \int d\mathbf{R}_3 \int d\varepsilon_1 \int d\varepsilon_3 \hat{T} \left(\mathbf{R}_1\mathbf{n} + \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \right) \hat{T}(\mathbf{R}_1\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}_3\mathbf{x}) \times \\ \times \hat{T}(\mathbf{R}_1\mathbf{z} \cdot \mathbf{R}_3\mathbf{z}) \hat{T} \left(-\mathbf{R}_3\mathbf{n} - \varepsilon_3 - \frac{1}{2} \right). \quad (104)$$

Здесь N — нормировочный множитель.

Качество телепортации оценивается числом $F = N_+(N_+ + N_-)^{-1}$, которое принято называть фиделити.

Стандартный математический формализм квантовой механики предсказывает для всех направлений \mathbf{n} фиделити $F = 1$. Реальный эксперимент [83] дал для фиделити значения $F = 0,92 \pm 0,02$ при $\mathbf{n} = \mathbf{z}$, $F = 0,90 \pm 0,03$ при $\mathbf{n} = \mathbf{x}$. Минимум фиделити $F = 0,84 \pm 0,02$ достигался при $\mathbf{n} = 2^{-1/2}(\mathbf{z} + \mathbf{x})$. Относительное фиделити (отношение к максимальному значению) в минимуме имело значение $F_r = 0,913$.

В нашем случае величины N_+ и N_- определяются формулами (103) и (104).

Сделаем в них замену

$$\widehat{T}(\mathbf{R}_1\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}_3\mathbf{x}) \rightarrow \widehat{T}(\mathbf{R}_1\mathbf{x})\widehat{T}(\mathbf{R}_3\mathbf{x}) + \widehat{T}(-\mathbf{R}_1\mathbf{x})\widehat{T}(-\mathbf{R}_3\mathbf{x})$$

и аналогичную замену при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$. После этого фигурирующие в них интегралы, относящиеся к скубитам $\{1\}$ и $\{3\}$, факторизуются и легко вычисляются. В результате, с точностью до общего множителя получается

$$N_-(\mathbf{n} = \mathbf{x}) = N_-(\mathbf{n} = \mathbf{z}) = 0,$$

$$N_+\left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{z}}{\sqrt{2}}\right) = 4 + 2(\sqrt{2} - 1)^2,$$

$$N_-\left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{z}}{\sqrt{2}}\right) = 2(\sqrt{2} - 1)^2.$$

Отсюда для фиделити получаем

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{z}) = 1, \quad F\left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{z}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 + (\sqrt{2} - 1)^2}{2 + 2(\sqrt{2} - 1)^2} \approx 0,927.$$

С учетом ошибок эксперимента это хорошо согласуется с экспериментальным значением для относительного фиделити. Обратим внимание на то, что никаких подгоночных параметров мы не использовали.

Мы не делали никаких предположений о динамике рассматриваемой нами системы. Все рассмотренные нами квантовые эффекты являются чисто статистическими. При этом они не являются следствиями какой-то специальной квантовой теории вероятностей. Они вполне укладываются в стандартную колмогоровскую теорию вероятностей. Единственное, о чем только не надо забывать, это то, что вероятностное пространство должно быть оснащено σ -алгеброй. Здесь имеется принципиальное различие между классическими и квантовыми системами. В то время как для классической системы можно ввести единую σ -алгебру, которая может обслужить все наблюдаемые, характерные для системы, в квантовой системе для каждой группы совместимых наблюдаемых надо вводить свою σ -алгебру и, соответственно, свою систему вероятностных мер. В нашем случае в построении таких мер существенную роль играли функции $\varepsilon(\mathbf{r})$, значения которых зависят от \mathbf{r} . Напомним, что рассматриваемые нами наблюдаемые — проекции спина на направления \mathbf{r} — являются несовместимыми для разных \mathbf{r} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
2. *Сигал И.* Математические проблемы релятивистской физики. М.: Мир, 1968.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
4. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
5. *Холесто А. С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980.
6. *Эмх Ж.* Алгебраический подход в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
7. *Хоружий С. С.* Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М.: Наука, 1986.
8. *Боголюбов Н. Н. и др.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
9. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2001. Т. 129, № 1. С. 87.
10. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2002. Т. 132, № 3. С. 434.
11. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2005. Т. 142, № 3. С. 510.
12. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
13. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
14. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
15. *Диксмье Ж.* C^* -алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
16. *Бор Н.* Квантовый постулат и новейшее развитие атомной теории // Избр. науч. тр.: В 2 т. М.: Наука, 1971. Т. 2. С. 30.
17. *Zeilinger B.* // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. S289.
18. *Бор Н.* Дискуссия с Эйнштейном по проблемам теории познания в атомной физике // Избр. науч. тр.: В 2 т. М.: Наука, 1971. Т. 2. С. 399.
19. *Everett H.* // Rev. Mod. Phys. 1957. V. 29. P. 454.
20. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2003. Т. 136, № 3. С. 437.
21. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
22. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1967.
23. *Jorrdan P.* // Commun. Math. Phys. 1933. V. 80. P. 285.
24. *Cohn D.* // Phys. Rev. 1952. V. 85. P. 166.
25. *Стриттер Р., Вайтман А. С.* РСТ, спин и статистика и все такое. М.: Наука, 1966.
26. *Born M.* // Z. Phys. 1926. V. 37. P. 863; V. 38. P. 803; 1927. V. 40. P. 167.
27. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
28. *Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н.* // УФН. 1936. Т. 16, вып. 4. С. 440.
29. *Cell J. S.* // Physics. 1965. V. 1. P. 195.
30. *Cell J. S.* On the Einstein–Podolsky–Rosen Paradox // Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Paper on Quantum Philosophy. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 139.
31. *Clauser J. F., Horn M. B., Shimony B., Holt R. B.* // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 23. P. 880.

32. Kochen S., Specker E. P. // J. Math. Mech. 1967. V. 17. P. 59.
33. Hume D., Whitaker M. B. C. // Phys. Rept. 1992. V. 210. P. 223.
34. Бом Д. Квантовая теория. М.: Наука, 1965.
35. Бор Н. // УФН. 1936. Т. 16, вып. 4. С. 446.
36. Фок В. А. // Там же. С. 436.
37. Schrödinger E. // Naturwissenschaften. 1935. V. 23. P. 807.
38. Белокуров В. В., Тимофеевская О. Д., Хрусталеv О. А. Квантовая телепортация — обыкновенное чудо. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
39. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 1 и 2. М.: Наука, 1973.
40. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960.
41. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Физматлит, 2006.
42. Дирак П. А. М. Общая теория относительности. М.: Атомиздат, 1978.
43. Биррел Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984.
44. Couder Y., Fort E. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 154–158.
45. Couder Y., Fort E., Boudaoud A., Protiere S. // Europhys. News. 2010. V. 41, No. 1. P. 14–18.
46. Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
47. Glauber R. J. // Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 2529–2539.
48. Glauber R. J. // Ibid. V. 131. P. 2766–2788.
49. де Бройль Л. Революция в физике. М.: Атомиздат, 1965.
50. Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных состояний. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.
51. Klaers J., Vewinger F., Weitz M. // Nature Phys. 2010. V. 6. P. 149–173.
52. Klaers J., Vewinger F., Weitz M., Schmitt J. // Nature. 2010. V. 468. P. 545–548.
53. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
54. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975.
55. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.
56. Блохинцев Д. И. // УФН. 1977. Т. 122, № 4. С. 745–758.
57. Блохинцев Д. И. Принципиальные вопросы квантовой механики. М.: Наука, 1987.
58. Блохинцев Д. И. Квантовая механика. Лекции по избранным вопросам. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
59. Демельт Х. // УФН. 1990. Т. 160, № 12. С. 129–139.
60. Славнов Д. А. Об эволюции Вселенной // Письма в ЭЧАЯ. 2016. Т. 13, № 1. С. 57–65.
61. Вайнберг С. Космология. М.: УРСС; Книжн. дом «Либроком», 2013.
62. Natiki M., Pascazio S. // Phys. Rept. 1993. V. 232. P. 301.
63. Aharonov Y., Bohm D. // Phys. Rev. 1959. V. 115. P. 485–491.
64. Chambers R. G. // Phys. Rev. Lett. 1960. V. 5, No. 1. P. 3–5.

65. *Osakabe N., Matsuda T., Kawasaki T., Endo J., Tonomura A., Yano S., Yamada H.* // Phys. Rev. A. 1986. V. 34. P. 815–822.
66. *Aharonov Y., Cohen E., Rohrlich D.* // Phys. Rev. A. 2016. V. 93. P. 42110-1–42110-5.
67. *Фейнберг Е. Л.* // УФН. 1962. Т. 78, № 1. С. 53–64.
68. *Tonomura A., Endo J., Matsuda T., Kawasaki T.* // Amer. J. Phys. 1989. V. 57. P. 117–120.
69. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Мир, 1968.
70. *Tonomura A.* // PNAS. 2005. V. 102, No. 42. P. 14952–14959.
71. *Wheeler J. B.* Mathematical Foundation of Quantum Theory. New York: Acad. Press, 1978. P. 9.
72. *Jacques V. et al.* // Science. 2007. V. 315. P. 966; quant-ph/0610241.
73. *Ma X. S., Kofler J., Qarry A., Tetik N., Scheidl T., Ursin R., Ramelow S., Herbst T., Ratschbacher L., Fedrizzi A., Jennew T., Zeller A.* Quantum Erasure with Causally Disconnected Choice // PNAS. 2013. V. 110, No. 4. P. 1221–1226.
74. *Kim Y. H., Yu R., Kulik S. P., Shin Y.* Delayed Choice Quantum Erasure // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 1-5; quant-ph/9903047v1. 1999.
75. *Rubin M. H., Klyshko D. N., Shih Y. H., Sergienko A. V.* Coherent and Incoherent States of the Radiation Field // Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 5122–5133.
76. *Schrödinger E.* // Naturwissenschaften. 1935. Bd. 23. S. 807.
77. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2006. Т. 149, № 3. С. 457.
78. Физика квантовой информации / Под общ. ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера. М.: Постмаркет, 2002.
79. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2008. Т. 157, № 1. С. 79.
80. *Боумейстер Д., Вайнфуртер Х., Цайлингер А.* Протокол квантовой телепортации // Физика квантовой информации / Под общ. ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера. М.: Постмаркет, 2002. С. 76.
81. *Боумейстер Д., Пэн Дж.-В., Вайнфуртер Х., Цайлингер А.* Эксперименты по квантовой телепортации кубитов // Там же. С. 95.
82. *Устинов А. В.* Моделирование двухуровневых систем // ВМУ. 2012. Сер. 3. № 4. С. 24–29.
83. *Jenneweit T., Weihs G., Pan J.-W., Zeilinger A.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88, No. 1. P. 017903.